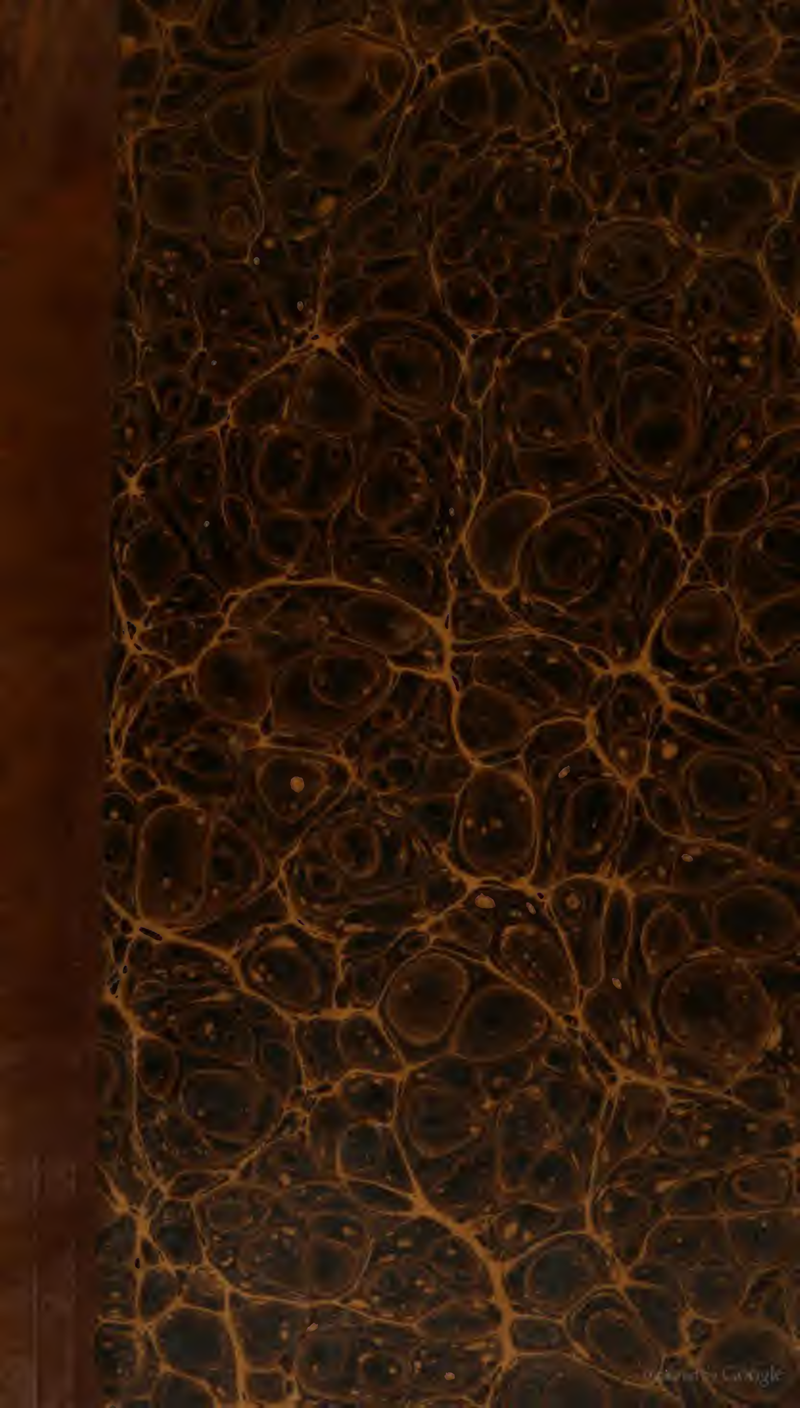



BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Anfangsgründe

der

Geometrie

vorzüglich

zum

Gebrauche an technischen Schulen.

Entworfen

von

Paul Huther,

k. Lehrer an der Kreis-Landwirthschafts- und Gewerbsschule
zu Regensburg.

Mit 6 Figurentafeln.

Regensburg, 1838.
Verlag von G. Joseph Manz.

Vorwort.

Unter den Unterrichtsgegenständen, welche an den Landwirthschafts- und Gewerbs-Schulen unsers Vaterlandes gelehrt werden, nimmt unstreitig die (elementare) Geometrie wegen ihrer vielfachen Anwendung in technischer Beziehung mit den ersten Rang ein. Darüber ist man auch einig; — hierin jedoch möchten die Ansichten in etwas getheilt seyn, in welcher Art der Unterricht der Geometrie an technischen Schulen ertheilt werden soll. Die einen halten es für hinreichend, daß man die Zöglinge dieser Schulen mit den geometrischen Sätzen, Aufgaben und Berechnungen bekannt mache, welche sich zunächst auf Technik beziehen, ohne dabei gerade eine besondere wissenschaftliche Methode in Anwendung zu bringen, und finden die Beweise für die geometrischen Sätze so ziemlich überflüssig; andere hingegen behaupten, die Geometrie müsse auch an technischen Anstalten in mathematischer d. h. beweisender Methode gelehrt werden. Um hierüber zu einem sichern Resultat zu gelangen, darf man nur den Zweck ins Auge fassen, welcher durch genannte Schulen erreicht werden soll. Die technischen Schulen sollen aber, wenn auch nicht die einzigen, doch die vorzüglicheren Hülfsmittel seyn, Gewerbsfleiß und Landwirthschaft im Vaterlande zu heben

und zu vervollkommnen. Gewerbe und Landwirthschaft können aber so lange nicht zur Blüthe gedeihen, als sie nicht rationell betrieben werden. Der Jüngling, welcher einst einen Gewerbszweig oder Landwirthschaft mit Erfolg betreiben will, bedarf daher nicht minder als der, welcher sich einst dem Dienste des Staates oder der Kirche widmet, — Verstandesbildung. Allein die Verstandesbildung, welche an technischen Schulen erzweckt werden soll, muß eine eigene, muß eine praktische seyn; d. h. es muß hier besonders der Sinn der Anwendung geweckt und belebt, und dem daselbst zu bildenden Jünglinge immer vor Augen gehalten werden, daß erlernte Theorie zur lebenskräftigen Ausübung gebracht werden könne. Aus dieser kurzen Betrachtung wird es klar in die Augen fallen, daß auf der einen Seite eine unmathematische Behandlung der Geometrie an technischen Schulen zu verwerfen sei, da eine solche den, wie gezeigt, höchst nothwendigen Zweck rationeller Bildung verfehlt, daß sonach der Beweis, die Seele der Geometrie, in welchem allein der mächtige Einfluß dieser Wissenschaft auf Belebung und Bildung der Verstandeskräfte zu suchen ist, auch hier nicht vernachläßigt werden dürfe. Ein anderer Umstand, der diese Behauptung kräftigst unterstützt, ist der wichtige Einfluß, welchen ein wissenschaftliches Betreiben der Geometrie auf die Charakterbildung des Jünglings ausübt, indem ihm ein solches einen gewissen Ernst verleiht, und an Gründlichkeit und Ausdauer gewöhnt, — Eigenschaften, welche dem künftigen Gewerbe oder Landwirthschaft treibenden Bürger in der Vervollkommnung derselben gewiß mit mächtiger Hilfe und Unterstützung zur Seite stehen. Damit aber auf der andern Seite durch den Unterricht in der Geometrie an

technischen Schulen praktische und technische Bildung erzielt werde, so müssen Anwendungen der geometrischen Sätze, besonders aber der geometrischen Berechnungen auf verschiedene Zweige der Technik vorzüglich berücksichtigt werden. —

Da mir im vorletzten Schuljahre der Lehrvortrag der Geometrie an der hiesigen Kreis-Landwirthschafts- und Gewerbsschule übertragen wurde, konnte ich kein Lehrbuch finden, welches dieser meiner so eben ausgesprochenen Ansicht über Art und Weise des Vortrages der Geometrie an technischen Schulen entsprochen hätte. Ich faßte daher den Entschluß, meine Kräfte zu versuchen, und meine freien Stunden der Abfassung eines Lehrbuches der Geometrie für technische Schulen, welches den durch dieselben zu erreichenden Bildungszwecken entspräche, zu widmen. Ich habe dabei aus den angeführten Gründen den wissenschaftlichen, beweisenden Gang beibehalten. Da jedoch an solchen Schulen der Unterricht in der Geometrie Jünglingen ertheilt wird, deren Fassungsvermögen man theils wegen ihres geringen Alters, theils wegen nicht besonderer Vorbildung nicht zuviel aufbürden darf, auch für diesen Gegenstand wegen der Zahl von andern Gegenständen, welche an technischen Schulen zu lehren sind, verhältnißmäßig nicht viel Zeit verwendet werden kann, so war mein Hauptaugenmerk bei der Verfassung vorliegender „Anfangsgründe der Geometrie" auf Faßlichkeit und Kürze gerichtet.

Als nöthige mathematische Vorbildung habe ich nur die Kenntniß der Stammrechnungsarten mit ganzen und gebrochenen besondern Zahlen, namentlich auch Dezimalbrüchen, der vier Stammrechnungsarten in allgemeinen Zah-

len, alsdann der Quadrat= und Kubikwurzel, besonders aber ein genaues Vertrautseyn mit der Proportionslehre vorausgesetzt. Faßlichkeit suchte ich durch Folge und Stellung der Sätze, durch wo möglich leichte Beweise und durch ein häufiges Citiren der Paragraphe von den Sätzen, in welchen die Gründe enthalten sind, — Kürze aber durch Auswahl der Sätze und einen eignen Gang, der besonders in der zweiten Abtheilung erkennbar seyn möchte, zu erstreben. Damit aber das Buch auch dem Zwecke praktischer und technischer Bildung entspreche, so habe ich nach fast jedem theoretischen Satz eine darauf sich beziehende geometrische Aufgabe folgen lassen, manchmal die Anwendung eines Satzes auf einen im Leben vorkommenden Fall gezeigt und besonders in den Abschnitten der Figuren und Körperberechnung eine ziemliche Anzahl von Beispielen, die sich größtentheils auf technische Gegenstände beziehen, und die man in beinahe allen Lehrbüchern der Geometrie umsonst suchen möchte, theils mit, theils ohne Lösung beigefügt.

Der Preis des Buches ist niedrig gestellt, damit sich dasselbe auch in dieser Hinsicht für technische Schulen eigne, da die Zöglinge derselben ohnehin für Anschaffung von Unterrichtsbüchern ziemliche Ausgaben haben.

Möge das Werkchen der Absicht, welche der Verfasser bei Bearbeitung desselben hatte, nämlich den technischen Schulen nützlich zu seyn, recht sehr entsprechen!

Regensburg im September 1838.

Der Verfasser.

Einleitung.

§. 1.

Erklärung. Geometrie ist die Wissenschaft von den räumlich ausgedehnten oder räumlich stetigen Größen.

Eine Größe heißt stetig, wenn ihre Theile so zusammenhängen, daß das Ende des einen zugleich der Anfang des andern ist.

Der Raum ist nach einer dreifachen Richtung ausgedehnt — nach Länge, Breite und Höhe. Man nennt diese Ausdehnungen die Abmessungen oder Dimensionen des Raumes.

Eine räumliche Ausdehnung, welche alle drei erwähnten Abmessungen hat, und von allen Seiten begrenzt ist, heißt ein geometrischer Körper, eine solche, welche nur zwei Abmessungen — Länge und Breite, aber keine Höhe hat, eine geometrische Fläche und eine räumliche Ausdehnung, welche nur eine einzige Abmessung — Länge, aber keine Höhe und Breite hat, eine geometrische Linie. Dasjenige, was im Raum zwar eine bestimmte Stelle bezeichnet, aber gar keine Ausdehnung hat, wird ein geometrischer Punkt genannt.

Unterschied zwischen geometrischen und physischen Körpern, Flächen Linien und Punkten!!

Grenze einer Größe nennt man dasjenige, womit sie aufhört zu seyn, was sie bis dahin war. Die Grenzen der Körper sind daher nur mehr Flächen, die Grenzen der Flächen Linien und die Grenzen der Linien Punkte.

Geometrische Größen heißen congruent, wenn sie so auf einander oder in einander gelegt werden können, daß ihre Grenzen überall aufeinander fallen, und sie sich also vollkommen decken. Das Zeichen der Congruenz geometrischer Größen ist $\cong$.

§. 2.

Erklärung. Eine räumliche oder geometrische Größe **messen** heißt angeben, wie oft eine andere bekannte Größe ihrer Art in ihr enthalten ist. Letztere wird das **Maß** genannt.

Erste Abtheilung.

Von Linien und ebenen Flächen.

Longimetrie und Planimetrie.

Erster Abschnitt.

Das Einfachste von Linien, Winkeln und Figuren.

---

§. 3.

Erklärung. Eine Linie (Fig. 1) heißt **gerade**, wenn in ihr die Lage aller Punkte durch die Lage zweier Punkte bestimmt ist, **krumm**, wenn kein Theil von ihr gerade ist (Fig 2). Linien, welche aus einzelnen geraden oder krummen Linien zusammengesetzt sind (Fig 3 u. 4), heißen **geradgebrochene** oder **krummgebrochene**.

Zusatz 1. Durch zwei Punkte A und B (Fig. 1) ist die Lage, und wenn es ihre Endpunkte sind, auch die Größe einer geraden Linie bestimmt. Man bezeichnet daher auch eine gerade Linie durch zwei an ihre Endpunkte gesetzte Buchstaben.

Zusatz 2. Zwischen zwei Punkten A und B gibt es nur eine einzige gerade Linie AB (Zus. 1), krumme und gebrochene aber unendlich viele.

Zusatz 3. Zwei gleich große gerade Linien sind congruent (§. 1. und §. 3. Zus. 1.)

Zusatz 4. Zwei verschiedene gerade Linien können nur einen Punkt miteinander gemein haben; denn hätten sie auch nur zwei Punkte gemein, so fielen sie in eine einzige zusammen (Zus. 2).

Zusatz 5. Zwischen zwei Punkten A und B gibt es keine **größte** Linie.

Zusatz 6. Die längste und kürzeste Linie zwischen zwei Punkten A u. B müßte eine bestimmte seyn; da es nun keine längste gibt (Zus. 5), und nur die gerade zwischen A und B durch diese Punkte selbst in Hinsicht auf Lage und Größe bestimmt ist (Zus. 1), so muß diese die kürzeste zwischen ihnen seyn. Man nennt AB die Entfernung des Punktes A von B.

§. 4.

Erklärung. Eine Fläche heißt eben oder eine Ebene; wenn eine gerade Linie, die man sich zwischen zwei willkührlichen Punkten derselben gezogen denkt, ganz in derselben liegt, krumm, wenn kein Theil derselben eben ist.

Ebnen einer Holzfläche z. B. eines Brettes mittelst des Hobels.

Zusatz 1. Eine gerade Linie, von welcher zwei Punkte in einer Ebene liegen, liegt ganz in derselben.

Zusatz 2. Um in einer (physischen) Ebene gerade Linien zu ziehen, bedient man sich der Lineale, dünner Platten von Holz oder Metall, deren Kanten genau geradlinig abgeschnitten sind — oder straff angespannter, in (rothe) Farbe getauchter Schnüre, die etwas aufgehoben und wieder losgelassen werden (§. 3. Zus. 1. und §. 4. Zus. 1).

Prüfung eines Lineals durch Umkehren desselben (§. 3. Zus. 1) mündlich!!

Anmerkung. Von allen Linien, von welchen in den acht ersten Abschnitten der ersten Abtheilung die Rede ist, wird immer vorausgesetzt, daß sie sich in einer und derselben Ebene befinden.

§. 5.

Erklärung. Zwei gerade Linien, welche in einer und derselben Ebene liegen und nie zusammenstossen, so weit sie auch verlängert werden mögen, heißen Parallel-Linien. Das Zeichen des Parallelismus zweier Linien ist ||.

Zusatz. Linien, welche in einer Ebene liegen und nicht parallel sind, stossen einmal zusammen, wenn sie gehörig verlängert werden.

§. 6.

Erklärung. Die Neigung zweier geraden Linien AB und CB (Fig. 5), die in einem Punkt B zusammenstossen, heißt ein ebener, geradliniger Winkel. Die Linien AB und CB, welche den Winkel bilden, nennt man seine Schenkel, und den Punkt B, in welchem sie zusammenstossen, seine Spitze oder seinen Scheitel. Man bezeichnet einen Winkel durch den Buchstaben B an seiner Spitze, oder durch einen kleinen, zwischen seine Schenkel gesetzten Buchstaben m, oder wenn Zweideutigkeit entstehen könnte, durch drei Buchstaben ABC, in der Art, daß man den Buchstaben B an der Spitze in die Mitte schreibt.

Zusatz 1. Die Größe eines Winkels hängt nur von der Neigung seiner Schenkel, nicht von ihrer Größe ab.

Zusatz 2. Zwei gleichgroße Winkel sind congruent.

Zusatz 3. Ein Winkel ABC (Fig. 6), dessen Schenkel AB u. CB in gerader Linie liegen, heißt ein gerader.

§. 7.

Erklärung. Zwei Winkel m und n (Fig. 7) heißen Nebenwinkel, wenn sie einen Schenkel CB gemein haben, und ihre andern Schenkel AB und DB in einer und derselben geraden Linie liegen.

Ein jeder von zwei gleichen Nebenwinkeln x und y (Fig. 8) heißt ein rechter (R), und ein jeder von zwei ungleichen m und n (Fig. 7) ein schiefer Winkel.

Zusatz 1. Wenn eine gerade Linie CB (Fig. 8) mit einer andern AB (AD) einen rechten Winkel ABC bildet, so sind die Nebenwinkel ABC und CBD gleich (Erklär.); es neigt sich daher CB zur Linie AD weder mehr auf die Seite gegen A, noch auf die andere gegen D, und man nennt in diesem Fall CB senkrecht auf AB (AD).

Zusatz 2. Alle rechten Winkel sind gleich (Zus. 1).

Zusatz 3. Der rechte Winkel hat eine bestimmte Größe (Zus. 2).

Zusatz 4. In einem Punkte B einer geraden Linie AD (Fig. 8) gibt es auf derselben blos eine senkrechte Linie CB (Zus. 1 und 3).

§. 8.

Erklärung. Eine von allen Seiten begrenzte Fläche heißt eine geometrische Figur, und zwar eine ebene Figur, wenn die Fläche eben, eine krumme, wenn die Fläche krumm ist.

Die ganze Grenze einer Figur wird ihr Umfang oder Perimeter genannt.

Die einzelnen Linien einer Figur heißen ihre Seiten, die Winkel, welche von denselben gebildet werden, Ecken, und gerade Linien, welche durch die Figur von einer Ecke zur andern gezogen sind, Diagonalen.

Eine ebene Figur heißt nach der Beschaffenheit ihrer Grenzlinien eine geradlinige, krummlinige oder gemischtlinige.

Zusatz 1. Eine geradlinige Figur hat wenigstens drei Seiten.

Zusatz 2. Eine geradlinige Figur hat eben so viel Ecken als Seiten. Denn es bildet die erste Seite mit der zweiten die erste Ecke, die zweite Seite mit der dritten die zweite Ecke ꝛc., die letzte oder nte Seite mit der ersten die nte Ecke.

Zusatz 3. Eine Linie DBE (Fig. 9), welche einen Punkt D innerhalb und einen Punkt E außerhalb einer ebenen Figur ABC liegen hat, schneidet den Umfang dieser in wenigstens einem Punkt B.

Zusatz 4. Wenn von einer ebenen Figur DBCE (Fig. 9) ein Punkt D ihres Umfangs innerhalb und ein Punkt E desselben außerhalb einer andern ebenen Figur ABC liegt, so schneiden sich ihre Perimeter in wenigstens zwei Punkten B und C (Zus. 3).

§. 9.

Erklärung. Eine geradlinige Figur heißt regulär oder regelmäßig, wenn alle Seiten und Winkel derselben gleich groß sind, sonst irregulär oder unregelmäßig.

§. 10.

Erklärung. Eine geradlinige Figur wird, je nachdem sie von drei, vier oder mehreren Seiten begrenzt wird, Dreieck, Viereck oder Vieleck (Polygon) genannt.

Man bezeichnet ein Dreieck durch die drei Buchstaben an seinen Ecken und das vorangesetzte Zeichen △, ein Viereck durch die vier

an seinen Ecken stehenden Buchstaben, oder auch durch die zwei Buchstaben an zwei gegenüberliegenden Ecken, falls dieselben nicht durch eine Diagonale verbunden sind.

§. 11.

Erklärung. Ein Dreieck ABC heißt gleichseitig (Fig. 10), wenn alle drei Seiten gleich sind, gleichschenklig (Fig. 11), wenn nur zwei Seiten gleich sind, und ungleichseitig (Fig. 12), wenn keine Seite der andern gleich ist. Grundseite eines Dreieckes nennt man diejenige Seite, auf welche man sich das Dreieck gestellt denkt, und Spitze den Winkelpunkt, welcher der Grundseite gegenüber liegt. Im gleichschenkligen Dreiecke ABC (Fig. 11) wird jedesmal die ungleiche Seite AC als Grundseite betrachtet; die beiden gleichen Seiten AB und BC nennt man seine Schenkel.

§. 12.

Erklärung. Ein Viereck ABCD heißt ein Parallelogramm (Fig. 13), wenn jedes Paar gegenüberstehender Seiten parallel sind, Trapez (Fig. 14), wenn nur eine Seite zur andern parallel ist, und Trapezoid (Fig. 15), wenn keine Seite zur andern parallel ist.

Grundseite eines Parallelogrammes oder Trapezes nennt man eine ihrer parallelen Seiten.

§. 13.

Erklärung. Eine ebene Figur (Fig. 16), deren Umfang in allen Punkten von einem Punkte C innerhalb derselben gleichweit entfernt ist, heißt man Kreis. Den Umfang des Kreises nennt man Kreislinie oder Peripherie (bisweilen ebenfalls Kreis) und einen Theil AB derselben Kreisbogen. Insbesondere heißt die Hälfte der Peripherie ein Halbkreis und der vierte Theil derselben ein Quadrant. Der Punkt C heißt der Mittelpunkt des Kreises, und jede aus dem Mittelpunkt nach einem Punkt der Peripherie gezogene gerade Linie CA, CB ein Halbmesser (radius). Eine gerade Linie AB, welche zwei Punkte der Peripherie

verbindet, nennt man Sehne, und eine gerade Linie FG, welche mit der Kreislinie nur einen einzigen Punkt D gemein hat, sonst aber ganz außerhalb derselben liegt, eine Tangente des Kreises. Geht eine Sehne durch den Mittelpunkt eines Kreises, so heißt sie ein Durchmesser (diameter) desselben.

Zusatz 1. Wenn sich eine gerade Linie AC um einen ihrer Endpunkte C in einer Ebene so lange umdreht, bis sie in ihre vorige Lage kömmt, so beschreibt ihr anderer Endpunkt A eine Kreislinie.

Handzirkel, Stangenzirkel!!

Zusatz 2. Alle Halbmesser eines und desselben Kreises sind gleich groß.

Zusatz 3. Ein Durchmesser eines Kreises ist doppelt so groß, als ein Halbmesser desselben; denn es ist $AD = AC + CD = AC + AC = 2\,AC = 2\,CD$. Es sind daher auch alle Durchmesser des nämlichen Kreises gleich (Zus. 2).

Zusatz 4. Ein Punkt, dessen Entfernung vom Mittelpunkt eines Kreises dem Halbmesser desselben gleich ist, liegt in der Peripherie, ein Punkt dessen Entfernung vom Mittelpunkt größer als der Halbmesser ist, außerhalb der Peripherie, und ein Punkt, dessen Entfernung vom Mittelpunkt kleiner als der Halbmesser ist, innerhalb der Peripherie desselben.

Zusatz 5. Congruente Kreise haben gleiche Halbmesser und Durchmesser.

Zusatz 6. Alle Kreise mit gleichen Halbmessern oder Durchmessern sind congruent; denn legt man sie mit ihren Mittelpunkten auf einander, so fallen ihre Grenzen in allen Punkten zusammen (Zus. 4).

§. 14.

Erklärung. Eine geradlinige Figur heißt in den Kreis eingeschrieben, oder der Kreis darum beschrieben, wenn alle Seiten derselben Sehnen, — um den Kreis beschrieben, oder der Kreis darin eingeschrieben, wenn alle Seiten derselben Tangenten des Kreises sind.

§. 15.

Erklärung. Kreise, welche den nämlichen Mittelpunkt haben

(Fig. 17), heißen **concentrische**, solche, die verschiedene Mittelpunkte haben (Fig. 19), **excentrische**. Die gerade Linie AB, welche die Mittelpunkte A und B zweier excentrischer Kreise verbindet, heißt **Centrallinie**.

§. 16.

Lehrsatz. Wenn die Halbmesser zweier Kreise und ihre Centrallinie eine solche Größe haben, daß je zwei von diesen Linien zusammen größer sind, als die dritte, so schneiden sich ihre Peripherien in (wenigstens) zwei Punkten. Es müssen sich also die Kreise um A und B (Fig. 18, 19, 20) schneiden, wenn 1) $AB + BD > AC$ 2) $BA + AC > BD$ und 3) $AC + BD > BA$ ist.

Beweis. Man verlängere die Centrallinie AB auf beiden Seiten bis E und F. Da nun 1) $AB + BD > AC$ oder $AB + BE > AC$, mithin $AE > AC$ ist, so liegt der Punkt E der Kreislinie um B außerhalb des Kreises um A (§. 13. Zus. 4). Da ferner 2) $BA + AC > BD$ oder $BA + AF > BD$, mithin $BF > BD$ ist, so liegt der Punkt D der Kreislinie um B zwischen B und F; und zwar kann derselbe in Beziehung auf den Mittelpunkt A des andern Kreises eine dreifache Lage haben. Er kann nämlich a) auf A selbst (Fig. 18) oder b) zwischen A und F (Fig. 19) oder c) zwischen A und B (Fig. 20) fallen. In den zwei ersten Fällen liegt D immer innerhalb des Kreises um A; im dritten Falle ist, da 3) $AC + BD > BA$ auch $AC > BA - BD$ oder $AC > AD$, mithin liegt auch hier der Punkt D innerhalb des Kreises um A (§. 13. Zus. 4). Da nun der Kreis um B einen Punkt E seiner Peripherie außerhalb des Kreises um A und einen Punkt D derselben innerhalb des Kreises um A hat, so schneiden sich ihre Peripherien in (wenigstens) zwei Punkten (§. 8. Zus. 4).

§. 17.

Erklärung. Ein Winkel ACB (Fig. 16), welcher seine Spitze im Mittelpunkt C eines Kreises hat, heißt ein **Centriwinkel** oder **Mittelpunktswinkel**, ein solcher aber, welche seine Spitze D in der Peripherie und zu Schenkeln Sehnen des Kreises hat, wie ADB, ein **Peripherie-** oder **Umfangswinkel**.

Ein von zwei Halbmessern AC und BC und dem dazwischen liegenden Bogen AB begrenzte Theil einer Kreisfläche heißt ein **Ausschnitt** oder **Sector**, und ein von einem Bogen AB und der dazu gehörigen Sehne begrenzte Theil derselben ein **Abschnitt** oder **Segment**.

§. 18.

Lehrsatz. Zu gleichen Centriwinkeln ACB und DCE (Fig. 21) gehören im nämlichen Kreise congruente und also auch gleiche Sehnen, Bögen, Aus- und Abschnitte.

Beweis. Man denke sich den Winkel ACB in der Ebene des Kreises um seine Spitze C so lange bewegt, bis seine Schenkel AC und CB die Schenkel CD und CE des mit ihm gleichen Winkels DCE (Voraussf.) decken (§. 6. Zus. 2), so fällt A auf D und B auf E, weil CA = CD und CB = CE ist (§. 13. Zus. 2. und §. 3. Zus. 3), mithin ist AB = BD (§. 3. Zus. 2).

Da ferner die Endpunkte A und B, B und E der Bögen AB und DE aufeinander liegen, überdieß auch jeder Punkt des Bogens AB zwischen A und B auf einen Punkt des Bogens DE zwischen D und E trifft (§. 13. Zus. 4), so ist Bgn. AB $\cong$ Bgn. DE (§. 1). Eben so ist auch Sect. ACB $\cong$ Sect. DCE und Segm. AB $\cong$ Segm. DE, da ihre Grenzen zusammenfallen (§. 1).

Zusatz 1. Ein Durchmesser AD (Fig. 23) theilt sowohl die Kreislinie als auch die Kreisfläche in zwei congruente Theile; denn die geraden Winkel ACD auf der Seite von B und E sind congruent, da ihre Schenkel AC und DC in gerader Linie liegen, mithin sind es auch die dazu gehörigen Bögen und Ausschnitte (Lehrs.).

Zusatz 2. Ein Centriwinkel x (Fig. 23), welcher ein rechter ist, schneidet sowohl von der Kreislinie, als auch von der Kreisfläche den vierten Theil (einen Quadranten) ab. Denn ist x = R, so ist auch x = y = z = v = R (§. 7. Zus. 1), mithin ist Bgn. AB = Bgn. BD = Bgn. DE = Bgn. EA = $\frac{1}{4}$ P *),

---

*) Wir bezeichnen jedesmal die Kreislinie mit P oder p, und die Kreisfläche mit C oder c.

Sect. ACB = Sect. BCD = Sect. DCE = Sect. ECA = $\frac{1}{4}$ C (Lehrs.).

Zusatz 3. Zu gleichen Centriwinkeln ACB und DCE (Fig. 21 und 22) gehören in Kreisen von gleichen Halbmessern oder Durchmessern gleiche Sehnen, Bögen, Aus- und Abschnitte: denn legt man die beiden Kreise mit ihren Mittelpunkten aufeinander, so fallen sie in einen zusammen (§. 13. Zus. 5).

§. 19.

Lehrsatz. Wenn in einem Kreise ein Centriwinkel ein Vielfaches von einem andern ist, so ist auch der zum erstern gehörige Bogen das eben so Vielfache von dem zu letzterem gehörigen Bogen.

Beweis. Es sey (Fig. 24) ACB = BCD, so ist AB = BD (§. 18), mithin ist für ACD = ACB + BCD = 2 ACB auch der dazu gehörige Bogen AD = Bgn. AB + Bgn. BD = 2 Bgn. AB. Ist ferner ACB = BCD = DCE, so ist Bgn. AB = Bgn. BD = Bgn. DE, mithin auch wieder für ACE = 3 ACB der dazu gehörige Bogen AE = 3 Bgn. AB. Eben so läßt sich weiter zeigen, daß, wenn ACF = 4 ACB ist, der zu ACF gehörige Bogen AF = 4 Bgn. AB ist ꝛc. Es ist also überhaupt ein Bogen AG = m Bgn. AB, wenn sein Centriwinkel ACG = m ACB ist.

Zusatz 1. Auf ähnliche Art läßt sich zeigen, daß Sect. ACG = m Sect. ACB ist, wenn sein Centriwinkel ACG = m ACB ist.

Zusatz 2. In einem Kreise verhalten sich die Bögen und Ausschnitte wie die dazu gehörigen Centriwinkel (Lehrs. und Arithm.).

Zusatz 3. Im nämlichen Kreise gehören zu gleichen Bögen auch gleiche Centriwinkel, Sehnen, Aus- und Abschnitte. Denn es ist (Fig. 21) Bgn. AB : Bgn. DE = ACB : DCE; ist nun Bgn. AB = Bgn. DE, so ist auch ACB = DCE (Arithm.). Sind aber die Centriwinkel gleich, so sind es auch die dazu gehörigen Sehnen, Aus- und Abschnitte (§. 18).

Zusatz 4. In congruenten Kreisen (Fig. 21 und 22) gehören zu gleichen Bögen AB und DE auch gleiche Centriwinkel, Sehnen, Aus- und Abschnitte (Zus. 3).

Zweiter Abschnitt.

Messung der geraden Linie, der Kreislinie und der Winkel.

---

§. 20.

Erklärung. Als Maß einer geraden Linie wird wieder eine gerade Linie gebraucht (§. 2). Die Grundseite des Linien- oder Längenmaßes nennt man Fuß. Man theilt denselben entweder nach dem Decimal- oder Duodecimalsystem ein.

Nach der Decimaleintheilung (dem zehntheiligen oder geometrischen Maß) theilt man den Fuß in 10 Zoll, den Zoll in 10 Linien, die Linie in 10 Scrupel. Zehn Fuß geben eine (geometrische) Ruthe.

Nach der Duodecimaleintheilung (dem zwölftheiligen oder Werkmaß) theilt man den Fuß in 12 Zoll, den Zoll in 12 Linien, die Linie in 12 Scrupel. Zwölf Fuß geben eine (Duodecimal-) Ruthe. Eine Klafter hält sechs Fuß.

Man bezeichnet Ruthen mit °, Fuß mit ', Zoll mit '', Linien mit ''', und Scrupel mit '''', in der Art, daß man diese Zeichen rechts über die Zahlen setzt: z. B. $4^\circ\ 5'\ 9''\ 4'''\ 8''''$ dd bedeutet 4 Ruthen 5 Fuß 9 Zoll 4 Linien 8 Scrupel Duodec. Maß.

Zusatz 1. Eine Linie messen heißt ihre Länge in Ruthen, Fußen, Zollen rc. angeben.

Zusatz 2. Die Größe eines Fußes ist in verschiedenen Ländern verschieden. Die Länge einer Linie, welche durch das Maß eines Landes gemessen ist, kann mit Hilfe von metrologischen Tafeln und der Proportion auf das Maß eines andern Landes reduzirt werden (Arithm.).

Zusatz 3. Wollte man eine krumme Linie durch eine gerade messen, so müßte jene erst in einer geraden ausgestreckt (gedacht) oder rectificirt werden.

Zusatz 4. Ein ebener Stab von Holz oder Metall, auf welchen eine oder mehrere Längeneinheiten nebst ihren Abtheilungen gezeichnet sind, heißt ein Maßstab.

§. 21.

Erklärung. Der 360ste Theil einer ganzen Kreislinie heißt ein Grad, der 60ste Theil eines Grades eine Minute, der 60ste Theil einer Minute eine Secunde, der 60ste Theil einer Secunde eine Terze ꝛc.

Man bezeichnet Grade mit °, Minuten mit ', Secunden mit " ꝛc. indem man diese Zeichen rechts über die Zahlen setzt.

Zusatz 1. Die ganze Kreislinie hält 360°, ein Halbkreis 180° und ein Quadrant 90°.

Zusatz 2. In Frankreich theilt man seit 1795 die ganze Kreislinie in 400 Grade, den Grad in 100 Minuten, die Minute in 100 Secunden ꝛc.

§. 22.

Erklärung. Denkt man sich einen Quadranten in seine Grade, Minuten ꝛc. getheilt, und durch die Theilungspunkte Halbmesser gezogen, so wird dadurch der rechte Winkel, von dessen Schenkeln der Quadrant eingeschlossen ist (§. 18. Zus. 2), in eben so viele gleiche Winkel getheilt, als der Quadrant Grade, Minuten ꝛc. hat (§. 18.). Man nennt daher auch den 90sten Theil eines rechten Winkels einen Grad, den 60sten Theil eines solchen Grades eine Minute ꝛc., und ein rechter Winkel hält also 90°.

Zusatz 1. Legt man einen Winkel ACB (Fig. 25) mit seiner Spitze in den Mittelpunkt C eines Kreises, so enthält derselbe eben so viele Winkelgrade, Winkelminuten ꝛc. als der zwischen seinen Schenkeln enthaltene Bogen AB Bogengrade, Bogenminuten ꝛc. hält. Denn es sei ACD ein rechter Winkel, so ist AD ein Quadrant oder $\frac{1}{4}$ C (§. 18. Zus. 2), und daher $\frac{1}{4}$ C : AB = R : ACB (§. 19, Zus. 2); da nun der rechte Winkel (R) gerade so viel (Winkel-) Grade, Minuten ꝛc., als der Quadrant $\frac{1}{4}$ C (Bogen-) Grade, Minuten ꝛc. enthält, so muß auch der Winkel ACD eben so viel (Winkel-) Grade, Minuten ꝛc. halten, als der Bogen AB (Bogen-) Grade, Minuten ꝛc. faßt (Arithm.). Es ist daher auch in Zahlen ausgedrückt Winkel ACB = Bgn. AB.

Zusatz 2. Ist ab ein mit AB concentrischer Kreisbogen zwi-

schen den Schenkeln des Centriwinkels ACB, so ist, wenn ACD = R ist, AD = $\frac{1}{4}$ C und ad = $\frac{1}{4}$ c, und mithin

$$\left.\begin{array}{r} \frac{1}{4}\ C : AB = R : ACB \\ \text{und}\ \frac{1}{4}\ c : ab = R : ACB \end{array}\right\} \text{(§. 19. Zus. 2.)}$$

also auch $\frac{1}{4}$ C : AB = $\frac{1}{4}$ c : ab (Arithm.)

Da nun sowohl $\frac{1}{4}$ C, als auch $\frac{1}{4}$ c 90° hält (§. 21. Zus. 1), so muß auch ab eben so viele Grade halten als AB (Arithm.). Es ist also die Zahl der Grade, welche irgend ein Kreisbogen ab hält, durch die Zahl der Grade bestimmt, welche ein mit ihm concentrischer Kreisbogen AB zwischen den Schenkeln seines Centriwinkels ACB enthält. Aus demselben Grunde kann auch ein Winkel ACB durch jeden Kreisbogen AB oder ab, welcher aus seiner Spitze C beschrieben und von seinen Schenkeln eingeschlossen ist, gemessen werden (Zus. 2).

Zusatz 3. Ein gerader Winkel ACD (Fig. 23) hält 180°; denn er hat zum Maß einen Halbkreis ABD (Zus. 2. und §. 18. Zusatz 1).

Zusatz 4. Zwei Nebenwinkel ACD und BCD, so wie auch alle Winkel zusammen, welche um einen Punkt C auf einer Seite einer geraden Linie, AB liegen (Fig. 26), halten 180°, denn sie haben zum Maß einen Halbkreis.

Zusatz 5. Alle Winkel um einen Punkt C ringsherum halten zusammen 360°; denn sie haben zusammen einen ganzen Kreis zum Maße.

Zusatz 6. Ein Winkel, welcher weniger als 180° hält, heißt ein hohler und ein solcher, welcher mehr als 180° hält, ein erhabener. Ein hohler Winkel heißt wieder spitzig oder stumpf, je nachdem er weniger oder mehr als 90° hält.

Zusatz 7. Zur Vermessung der Winkel und Bögen bedient man sich ganzer, halber oder Viertelskreise von beliebigen Halbmessern, gewöhnlich aus Messing verfertigt, die in ihre Grade (öfters auch in noch kleinere Bögen) getheilt sind.

Ein Halbkreis von Messing oder durchsichtigem Horn, dessen Mittelpunkt durch einen Einschnitt bezeichnet, und der in seine 180° getheilt ist, heißt Transporteur.

Sein Gebrauch zur Vermessung der Bögen und zur Vermessung und Zeichnung der Winkel (Zus. 2) mündlich!!

§. 23.

Erklärung. Zwei Winkel m und n oder x und y (Fig. 27), welche dieselbe Spitze O haben, bei welchen aber die Schenkel des einen die verlängerten Schenkel des andern sind, heißen Scheitel- oder Vertikalwinkel.

Zusatz. Jede zwei Scheitelwinkel m und n sind gleich; denn es ist $m + x = 180^0$ und $n + x = 180^0$ (§. 22. Zus. 4), mithin ist $m + x = n + x$ und $m = n$ (Grunds.)

Dritter Abschnitt.

Von der Congruenz der Dreiecke.

---

§. 24.

Grundsatz. In congruenten Dreiecken liegen gleichen Seiten gleiche Winkel, und gleichen Winkeln gleiche Seiten gegenüber.

§. 25.

Lehrsatz. Zwei Dreiecke sind congruent, wenn zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel in dem einen so groß sind als in dem andern. Es ist also $\triangle\ abc \cong \triangle\ ABC$ (Fig. 28 und 29), wenn $ab = AB$, $ac = AC$ und $bac = BAC$ ist.

Beweis. Legt man das $\triangle\ abc$ so auf das $\triangle\ ABC$, daß a auf A und ab längs AB fällt, so decken sich diese Seiten, weil $ab = AB$ ist (Voraus.), und es fällt b auf B (§. 3. Zus. 3). Weil ferner $bac = BAC$ ist (Voraus.), so fällt auch ac längs AC (§. 6. Zus. 2), und es decken sich diese Seiten, weil $ac = AC$ ist (Voraus.). Es fällt also auch c auf C, und da auch b auf B liegt, so decken sich auch bc und BC (§. 3. Zus. 2), mithin ist $\triangle\ abc \cong \triangle\ ABC$ (§. 1).

Zusatz. Durch zwei Seiten und den von ihnen eingeschlossenen Winkel ist ein Dreieck vollkommen bestimmt.

§. 26.

Lehrsatz. Eine gerade Linie BD, welche den Winkel ABC an der Spitze eines gleichschenkligen Dreieckes ABC (Fig. 30) halbirt, halbirt (gehörig verlängert) auch die Grundlinie AC, und steht auf ihr senkrecht.

Beweis. Weil AB = BC (§. 11), m = n = $\frac{1}{2}$ ABC (Voraussſ.) und BD = BD ist; so ist △ ABD ≅ △ CBD (§. 25), mithin AD = DC = $\frac{1}{2}$ AC (§. 24), und ADB = BDC = 90° (§. 7).

Zusatz 1. Beschreibt man aus der Spitze B eines gleichschenkligen Dreieckes ABC mit einem Schenkel BA desselben einen Kreis, so geht dieser durch A und C (§. 13. Zus. 4), und vorstehender Satz geht daher in diesen über: Eine gerade Linie BD, welche einen Centriwinkel ABC halbirt, halbirt auch die dazu gehörige Sehne AC, und steht auf ihr senkrecht.

Zusatz 2. Im gleichschenkligen Dreieck sind die Winkel an der Grundseite A und C gleich; denn denkt man sich eine Linie BD, welche den Winkel ABC an der Spitze halbirt, so ist △ ABD ≅ △ CBD (Bew. des Lehrs.) und A = C (§. 24).

Zusatz 3. Im gleichseitigen Dreiecke sind alle Winkel gleich; dasselbe ist also eine reguläre Figur (§. 9).

§. 27.

Lehrsatz. Zwei Dreiecke abc und ABC (Fig. 28 und 29) sind congruent, wenn die drei Seiten des einen gleich sind den drei Seiten des andern d. h. wen ac = AC, bc = BC und ab = AB ist.

Beweis. Man lege die beiden Dreiecke mit zwei gleichen Seiten etwa ac und AC so aneinander, daß der Punkt a auf A, der Punkt c auf C fällt, und das Dreieck ABC gegen das Dreieck abc eine entgegengesetzte Lage erhält. Verbindet man die gegenüberliegenden Scheitel der Winkel abc und ABC durch eine gerade Linie Bb, so ergeben sich drei Fälle: es fällt 1) Bb mit zwei Seiten AB und ab der Dreiecke zusammen oder sie kömmt 2) innerhalb oder 3) außerhalb der Dreiecke zu liegen.

Im ersten Fall (Fig. 31) ist im △ BCb b = B, weil bc = BC (§. 26. Zus. 2). Es ist aber auch ab = AB; mithin ist △ abc ≅ △ ABC (§. 25).

Im zweiten und dritten Fall (Fig. 32 und 33) ist im $\triangle$ BCb cbB = CBb, weil bc = BC, und im $\triangle$ ABb abB = ABb, weil ab = AB (§. 26. Zus. 2). Es ist daher Fig. 32 cbB + abB = CBb + ABb und Fig. 33 cbB — abB = CBb — ABb, also in beiden Fällen abc = ABC, und da auch bc = BC, ab = AB ist, $\triangle$ abc $\cong$ $\triangle$ ABC (§. 25).

Zusatz. Durch seine drei Seiten ist ein Dreieck vollkommen bestimmt.

§. 28.

Aufgabe. Aus drei gegebenen Linien a, b und c (Fig. 34), wovon je zwei zusammen größer als die dritte sind, ein Dreieck zu verzeichnen.

Auflösung. Man mache eine gerade Linie AC = a, beschreibe aus dem einen Endpunkt A derselben mit einem Halbmesser = b und aus dem andern C mit einem Halbmesser = c Kreise (Kreisbögen), verbinde einen Durchschnittspunkt B derselben mit den Punkten A und C der Linie AC durch gerade Linien BA und BC, so ist ABC das verlangte Dreieck.

Beweis. Da je zwei der gegebenen Linien zusammen größer als die dritte sind, so müssen sich, wenn aus den Endpunkten von AC = a (Centrallinie) mit den beiden andern Kreise beschrieben werden, dieselben schneiden (§. 16). Da nun AC = a, AB = b und BC = c ist, so ist ABC das verlangte Dreieck, und zwar das einzige unter den gegebenen Voraussetzungen mögliche, da ein Dreieck durch drei Seiten vollkommen bestimmt ist (§. 27 Zus.).

Zusatz 1. Ist b = c, so erhält man ein gleichschenkliges, und ist a = b = c, ein gleichseitiges Dreieck (§. 11).

Zusatz 2. In jedem Dreieck ist die Summe je zweier Seiten größer als die dritte Seite (Aufg. und §. 3. Zus. 6).

Zusatz 3. Eben so wie die vorige wird die Aufgabe gelöst: Ein Dreieck zu zeichnen, welches mit einem gegebenen congruent ist.

§. 29.

Aufgabe. Ein geradliniges Vieleck zu zeichnen, welches mit einem gegebenen ABCDEF (Fig. 35) congruent ist.

Auflösung. Man ziehe von einem Winkelpunkte A des

Vieleckes nach den übrigen Diagonalen, so wird dadurch dasselbe in lauter Dreiecke getheilt. Diese Dreiecke zeichne man (§. 28. Zus. 3) einzeln in derselben Ordnung nebeneinander, so erhält man (Fig. 36) ein Vieleck abcdef, welches mit dem gegebenen ABCDEF congruent ist.

Zusatz. Geradlinige congruente Vielecke ABCDEF und abcdef werden durch Diagonalen, die von gleichliegenden Winkelpunkten A und a aus gezogen sind, in lauter Dreiecke getheilt, von welchen ein jedes des einen Vieleckes mit dem gleichliegenden des andern congruent ist (Aufl. d. Aufg.).

§. 30.

Lehrsatz. Zu gleichen Sehnen AB und DE (Fig. 21) gehören im nämlichen Kreise auch gleiche Centriwinkel, Bögen, Aus- und Abschnitte.

Beweis. Wenn AB = DE ist, so ist, da auch AC = DC und BC = EC (§. 13. Zus. 2), $\triangle$ ABC $\cong$ $\triangle$ DCE (§. 27), und ACB = DCE (§. 24). Sind aber die Centriwinkel gleich, so sind auch die dazu gehörigen Bögen, Aus- und Abschnitte gleich (§. 18).

Zusatz. In congruenten Kreisen (Fig. 21 und 22) gehören zu gleichen Sehnen AB und DE gleiche Centriwinkel, Bögen, Aus- und Abschnitte.

§. 31.

Aufgabe. An einem Punkt b einer geraden Linie bc (Fig. 38) einen Winkel abc zu zeichnen, welcher einem gegebenen ABC (Fig. 37) gleich ist.

Auflösung. Man beschreibe aus der Spitze B des Winkels ABC mit einem beliebigen Halbmesser einen Kreis (Kreisbogen), welcher beide Schenkel desselben schneidet. Aus b beschreibe man dem nämlichen Halbmesser einen Kreis (Kreisbogen), welcher bc schneidet, und aus dem Durchschnittspunkt e mit einem Halbmesser = DE einen andern, welcher vorigen schneidet. Zieht man nun durch b und den Durchschnittspunkt d der Kreise eine gerade Linie ba, so erhält man einen Winkel abc = ABC.

Beweis. Man ziehe DE und de. Da be = BE und im

$\triangle$ BDE die Summe je zweier Seiten größer als die dritte ist (§. 28. Zus. 2), so müssen sich die aus b und e mit den Halbmessern BD und DE beschriebenen Kreise schneiden (§. 16). Es sind aber die mit gleichen Halbmessern beschriebenen Kreise edf und EDF congruent (§. 13. Zus. 6), und die Sehnen de und DE gleich (Aufl.), mithin ist abc = ABC (§. 30. Zus.).

§. 32.

Aufgabe. Einen gegebenen geradlinigen Winkel ABC (Fig. 39) zu halbiren.

Auflösung. Man schneide von der Spitze B aus von den Schenkeln BA und BC des Winkels beliebige, aber gleiche Stücke BD und BE ab, beschreibe aus D und E mit gleichen Halbmessern Kreisbögen, welche sich schneiden (§. 16). Den Durchschnittspunkt F dieser Bögen und die Spitze B des Winkels verbinde man durch eine gerade Linie BF, so halbirt diese den Winkel.

Beweis. Man ziehe die Halbmesser DF und EF, so ist BD = BE, DF = EF (Aufl.) und BF = BF, mithin $\triangle$ BDF $\cong$ $\triangle$ BEF (§. 27) und m = n = $\frac{1}{2}$ ABC (§. 24).

§. 33.

Aufgabe. Eine gerade Linie AC (Fig. 30) durch eine Senkrechte zu halbiren.

Auflösung. Man zeichne auf AC ein gleichschenkliges Dreieck ABC (§. 28. Zus. 1), und halbire den Winkel ABC an der Spitze desselben (§. 32), so halbirt die Halbirungslinie BD dieses Winkels auch die Linie AC, und steht auf ihr senkrecht (§. 26).

Anmerkung. Die Schenkel AB und BC brauchen nicht wirklich gezogen zu werden, da es hier nur darauf ankommt, die Spitze B des gleichschenkligen Dreiecks bestimmt zu haben.

Zusatz. Um einen Kreisbogen AC (Fig. 30) zu halbiren, halbire man seine Sehne AC durch eine Senkrechte BE, so halbirt diese auch den Bogen; denn es ist dann AD = CD, ADE = CDE = 90° und DE = DE, mithin $\triangle$ ADE $\cong$ $\triangle$ CDE (§. 25) und AE = CE (§. 24), folglich auch Bgn. AE = Bgn. CE = $\frac{1}{2}$ Bgn. AC (§. 30).

§. 34.

Aufgabe. Auf eine gerade Linie AC (Fig. 40) von einem außerhalb derselben liegenden Punkt B eine Senkrechte zu fällen.

Auflösung. Man beschreibe aus B einen Kreisbogen, welcher AC in zwei Punkten D und E schneidet, und halbire den Winkel DBE (§. 32), so steht die Halbirungslinie BF desselben senkrecht auf DE (AC) (§. 26. Zus. 1).

§. 35.

Lehrsatz. Eine gerade Linie BD, welche von der Spitze B eines gleichschenkligen Dreieckes ABC (Fig. 30) auf die Mitte D seiner Grundlinie gezogen wird, halbirt den Winkel ABC an der Spitze, und steht auf der Grundlinie senkrecht.

Beweis. Da AB=BC, AD=DC (Voraussf.) und BD=BD ist, so ist $\triangle$ ABD $\cong$ $\triangle$ BDC (§. 27), mithin m = n = $\frac{1}{2}$ ABC und ADB = BDC = 90° (§. 7).

Anwendung dieses Satzes auf die Setzwage!

Zusatz. Wenn von dem Mittelpunkt B eines Kreises auf die Mitte D einer Sehne AC eine gerade Linie BD gezogen wird, so halbirt diese den Centriwinkel ABC, und steht auf der Sehne senkrecht.

§. 36.

Aufgabe. In einem Punkte F einer geraden Linie AC (Fig. 40) auf derselben die Senkrechte FB zu errichten.

Auflösung. Man schneide von F aus beliebige, aber gleiche Stücke FD und FE ab, zeichne auf DE ein gleichschenkliges Dreieck BDE, und ziehe BF, so steht diese senkrecht auf DE (AC) (§. 35).

§. 37.

Lehrsatz. Ein äußerer Winkel BCD (Fig. 41) eines Dreieckes ABC — er entsteht, wenn eine Seite AC desselben verlängert wird — ist größer, als jeder von den beiden innern entgegengesetzten ABC und BAC.

Beweis. Es ist a) BCD größer, als der innere entgegengesetzte Winkel ABC, welcher mit ihm einen Schenkel BC gemein hat; denn man halbire BC in E (§. 33), ziehe die gerade Linie

AE und verlängere sie, bis EF = AE wird, ziehe dann noch CF, so ist CE = BE, EF = AE und m = n (§. 23. Zus.), mithin Δ ECF $\cong$ Δ ABE (§. 25) und ECF = ABC. Nun ist aber BCD $>$ ECF, folglich auch BCD $>$ ABC.

Es ist aber auch b) BCD $>$ BAC; denn verlängert man BC gegen G so ist ACG $>$ BAC (nach a); es ist aber ACG = BCD (§. 23. Zus.), folglich auch BCD $>$ BAC.

§. 38.

Lehrsatz. In jedem Dreiecke ABC (Fig. 42) ist die Summe je zweier Winkel kleiner als 180°.

Beweis. Man verlängere AC nach beiden Seiten, so ist 1) $o < x$ (§. 37), $n = n$, mithin $o + n < x + n$ oder, da $x + n = 180°$ (§. 22. Zus. 4), $o + n < 180°$. Eben so ist 2) $m < x$, $n = n$, mithin $m + n < n + x$ oder $m + n < 180°$ und 3) $o < y$, $m = m$, mithin $o + m < y + m$ oder $o + m < 180°$.

Zusatz 1. Ein Dreieck kann nur einen rechten oder stumpfen Winkel haben (Lehrs. und §. 22. Erkl. und Zus. 6). Ein Dreieck heißt **spitzwinklig**, **rechtwinklig** oder **stumpfwinklig**, je nachdem es lauter spitzige, einen rechten oder stumpfen Winkel hat. Im rechtwinkligen Dreieck nennt man die Seite, welche dem rechten Winkel gegenüberliegt, **Hypotenuse**, die beiden andern Seiten **Katheten**.

Zusatz 2. Von einem Punkte B (Fig. 40) gibt es auf eine gerade Linie AC nur eine einzige Senkrechte BF; denn wäre von B aus noch eine andere gerade Linie etwa BE senkrecht auf AC, so hätte man ein Dreieck BFE mit zwei rechten Winkeln BFE und BEF, welches unmöglich ist (Zus. 1).

§. 39.

Lehrsatz. Wenn zwei gerade Linien AB und CD (Fig. 43) von einer dritten EF geschnitten werden, und es sind zwei innerhalb derselben auf einer Seite von EF liegende Winkel BGI und DIG zusammen kleiner als 180°, so müssen sich AB und CD hinlänglich verlängert auf der Seite dieser Winkel einmal schneiden.

Beweis. Man ziehe durch I unter dem Winkel FIL = BGI

eine gerade Linie IL (§. 31), so ist, da BGI + DIG < 180° (Voraussf.), auch FIL + DIG < 180°. Es ist aber DIF + DIG = 180° (§. 22. Zus. 4), mithin ist FIL + DIG < DIF + DIG und daher FIL < DIF; es liegt also IL zwischen den Schenkeln FI und DI des Winkels DIF.

Rückt man die Linie IL, welche unendlich lang gedacht werden kann, an EF gegen E in stets unveränderter Lage zu EF, also so, daß sie immer mit EF auf der Seite von F einen Winkel = LIF macht, so muß, da IL CD anfänglich in I schneidet und unter ID liegt, jeder Punkt K von IL nach und nach mit einem Punkt der Linie ID, die ebenfalls unendlich lang gedacht werden kann, zusammenfallen, mithin IL in jeder Lage I′ L′ die sie bei ihrem Vorwärtsschieben gegen E erhält, die Linie ID durchschneiden, wobei noch immer ein Theil KL von IL unter ID liegt. Trifft auf diese Art der Punkt I der Linie IL den Punkt G der Linie EF, so fällt IL mit GB (AB) zusammen, weil FIL = BGI ist (§. 6. Zus. 2). Da nun IL auch in dieser Lage ID (CD) schneidet, so muß auch AB gehörig verlängert CD schneiden.

Zusatz. Wenn man auf den Schenkeln AB und CB eines (hohlen) Winkels ABC (Fig. 44, 45, 46) zwei beliebige senkrechte Linien DE und FG errichtet, so müssen sich diese gehörig verlängert einmal schneiden. Denn ist ABC ein rechter oder stumpfer Winkel (Fig. 44), so ist, wenn man DF ziehet, BDF < 90° und BFD < 90° (§. 38. Zus. 1), mithin liegt DF zwischen den Schenkeln der rechten Winkel (Voraussf.) BDE und BFG; es ist daher EDF < 90° und DFG < 90°, mithin EDF + DFG < 180°, folglich müssen sich DE und FG einmal schneiden (Lehrs.). Ist aber ABC ein spitziger Winkel (Fig. 45 und 46), also < 90° (§. 22. Zus 6), so ist, da BFG = 90° (Voraussf.), ABC + BFG < 180°, also schneidet FG einmal die Linie BA in irgend einem Punkt H (Lehrs.) Dann ist aber im rechtwinkligen Dreieck BFH BHF < 90° (§. 38. Zus. 1), und daher in Fig. 45, weil EDH = 90° (Voraussf.), BHF + EDH < 180° und in Fig. 46, weil BHF = IGD (§. 23. Zus.) und EDH = HDL = 90° (§. 7. Zus. 1), auch IHD + HDL < 180°, mithin schneiden sich auch in diesem Falle einmal DE und FG (Lehrs.).

§. 40.

Lehrsatz. Eine gerade Linie DF (Fig. 30), auf der Mitte D der Grundlinie AC eines gleichschenkligen Dreieckes ABC senkrecht errichtet, geht durch die Spitze B desselben.

Beweis. Man ziehe von B nach D eine gerade Linie BD, so steht diese auf AC im Punkte D senkrecht (§. 35). Nun fällt aber DF ihrer Lage nach mit BD in eine Linie zusammen, da es in einem Punkte D einer geraden Linie auf derselben nur eine einzige Senkrechte gibt (§. 7. Zus. 4), und folglich geht DF durch die Spitze B des gleichschenkligen Dreieckes ABC.

Zusatz. Eine gerade Linie DF, senkrecht auf der Mitte D einer Sehne AC errichtet, geht durch den Mittelpunkt B ihres Kreises.

§. 41.

Aufgabe. Den Mittelpunkt eines Kreises (Kreisbogens) zu finden (Fig. 47).

Auflösung. Man ziehe von einem beliebigen Punkt B der Kreislinie zwei Sehnen BA und BD, halbire jede durch eine Senkrechte (§. 33), verlängere diese, bis sie sich schneiden, so ist ihr Durchschnittspunkt C der Mittelpunkt des Kreises.

Beweis. Die senkrechten Linien EF und GH müssen sich einmal schneiden (§. 39. Zus.). Der Mittelpunkt des Kreises liegt aber in jeder der Senkrechten EF und GH (§. 40. Zus.), und da sie nur einen Punkt C (Durchschnittspunkt) mit einander gemein haben können (§. 3. Zus. 4), so muß dieser der Mittelpunkt des Kreises seyn.

§. 42.

Lehrsatz. Im Dreieck steht der größern Seite der größere Winkel gegenüber. Es ist also (Fig. 48) ACB $>$ BAC, wenn AB $>$ BC.

Beweis. Man schneide von AB das Stück BD $=$ BC ab, so fällt D zwischen B und A, folglich ist, wenn man CD ziehet, ACB $>$ BCD. Nun ist aber BCD $=$ BDC (§. 26. Zus. 2), und BDC $>$ BAC (§. 37), mithin auch BCD $>$ BAC, folglich um so mehr ACB $>$ BAC.

Zusatz 1. Im Dreieck steht dem größern Winkel die größere Seite gegenüber. Es ist AB > BC, wenn ACB > BAC; denn wäre AB = BC, so müßte ACB = BAC (§. 26. Zus. 2), und wäre AB < BC, so müßte ACB < BAC seyn (Lehrs.). Da nun beides der Voraussetzung widerspricht, so muß AB > BC seyn.

Zusatz 2. Im rechtwinkligen Dreieck ist die Hypotenuse und im stumpfwinkligen die Seite die größte, welche dem stumpfen Winkel gegenüber liegt (Zus. 1 und §. 38. Zus. 1).

Zusatz 3. Die senkrechte Linie BF (Fig. 40) ist die kürzeste, welche von einem Punkte B außer einer geraden Linie AC auf dieselbe gezogen werden kann; denn jede andere BE ist die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreieckes BFE, und folglich größer als BD (Zus. 2). Man nennt deßwegen auch BF die Entfernung des Punktes B von der geraden Linie AC.

Zusatz 4. Die Entfernung der Spitze B eines Dreieckes ABC oder ABE (Fig. 49 und 50) von seiner Grundseite AC oder deren Verlängerung, nämlich die senkrechte Linie BD, heißt die Höhe des Dreieckes. Im rechtwinkligen Dreieck BDC (Fig. 30) fällt, wenn ein Kathete CD als Grundseite angenommen wird, die Höhe mit der andern Kathete BD zusammen (§. 38. Zus. 2).

§. 43.

Lehrsatz. Zwei Dreiecke sind congruent, wenn eine Seite und zwei Winkel des einen gleich sind einer Seite und zwei gleichliegenden Winkeln des andern. Es ist also △ abc ≅ △ ABC (Fig. 51 und 52), wenn ac = AC, bac = BAC und entweder 1) acb = ACB oder 2) abc = ABC ist.

Beweis. In beiden Fällen muß auch ab = AB seyn, und folglich ist △ abc ≅ △ ABC (§. 25). Denn wäre ab größer oder kleiner als AB, so müßte entweder ein Theil von ab oder das verlängerte ab dem AB gleich seyn. Es sei eine solche Linie ad, so wäre, wenn man cd ziehet, da ad = AB (Annahme), ac = AC und bac = BAC (Voraussf.) ist, △ adc ≅ △ ABC (§. 25).

Daher wäre auch im ersten Fall acd = ACB, und da auch acb = ACB (Voraussf.), acd = acb, also der Theil dem Ganzen gleich; im zweiten Fall adc = ABC, und da auch abc = ABC

(Vorausſ.), adc = abc, alſo der äußere Winkel dem ihm im Dreieck entgegengeſetzten gleich. Da nun erſteres an und für ſich, letzteres aber nach §. 36. Lehrſ. unmöglich iſt, ſo muß ab = AB ſeyn.

Zuſatz. Durch eine Seite und zwei anliegende oder einen anliegenden und einen gegenüberliegenden Winkel iſt ein Dreieck vollkommen beſtimmt.

§. 44.

Lehrſatz. Eine gerade Linie BD (Fig. 30), welche von der Spitze B eines gleichſchenkligen Dreieckes ABC ſenkrecht auf die Grundlinie AC deſſelben gezogen iſt, halbirt den Winkel an der Spitze und die Grundlinie.

Beweis. Da BAC = ACB (§. 26. Zuſ. 2), ADB = BDC = 90° (Vorausſ.) und BD = BD iſt, ſo iſt $\triangle$ ABD $\cong$ $\triangle$ BDC (§. 43) und daher m = n = $\frac{1}{2}$ ABC und AD = DC = $\frac{1}{2}$ AC.

Zuſatz 1. Eine gerade Linie BD, welche vom Mittelpunkt B eines Kreiſes ſenkrecht auf eine Sehne AC deſſelben gezogen wird, halbirt den dazu gehörigen Centriwinkel ABC und die Sehne.

Zuſatz 2. Wenn ein Dreieck ABC zwei gleiche Winkel BAC und ACB hat, ſo liegen dieſen gegenüber auch zwei gleiche Seiten BC und AB, und das Dreieck iſt alſo gleichſchenklig (§. 11); denn man ziehe von B auf AC die Senkrechte BD, ſo iſt $\triangle$ ABD $\cong$ $\triangle$ BDC (Bew. des Lehrſ.) und AB = BC.

Zuſatz 3. Wenn ein Dreieck drei gleiche Winkel hat, ſo iſt es gleichſeitig (§. 11).

Vierter Abſchnitt.

Von den Parallellinien.

---

§. 45.

Erklärung. Wenn zwei gerade Linien AB und CD (Fig. 53) von einer dritten EF geſchnitten werden, ſo nennt man

1) m und p, o und n **innere auf einer Seite liegende Winkel,**

2) die Winkel m und n, o und p **innere Wechſelwinkel** und

3) x und p, m und y, u und n, o und z innere und äußere entgegengesetzte Winkel.

§. 46.

Lehrsatz. Wenn zwei gerade Linien AB und CD (Fig. 53), welche in einer Ebene liegen, von einer dritten geraden Linie EF geschnitten werden, und es sind zwei innere auf einer Seite liegende Winkel m und p zusammen 180°, so sind AB und CD parallel.

Beweis. Die Linien AB und CD können weder a) auf der Seite der Winkel m und p, noch b) auf der andern Seite, auf der Seite der Winkel o und n zusammenstoßen, und sind also, da sie in einer Ebene liegen, parallel (§. 5). Denn stießen AB und CD auf a) der Seite der Winkel m und p je zusammen, so entstünde ein Dreieck, in welchem zwei Winkel m und p zusammen 180° hielten (Voraussf.), welches unmöglich ist (§. 38). Da aber $m + p = 180^\circ$ (Voraussf.), $o + m = 180^\circ$ und $n + p = 180^\circ$ (§. 22. Zus. 4), so ist $o + m + n + p = 360^\circ$ und folglich ($m + p = 180^\circ$ davon subtrahirt) $o + n = 180^\circ$; es können also AB und CD auch b) auf der Seite der Winkel o und n nie zusammenstoßen (a).

Zusatz 1. Zwei gerade Linien AB und CD sind parallel, wenn zwei innere Wechselwinkel o und p gleich sind; denn ist $o = p$, so ist, da $o + m = 180^\circ$ (§. 22. Zus. 4), auch $p + m = 180^\circ$, mithin $AB \parallel CD$ (Lehrs.).

Zusatz 2. Zwei gerade Linien AB und CD sind parallel, wenn ein innerer und äußerer entgegengesetzter Winkel gleich sind; denn ist $p = x$, so ist, da auch $o = x$ (§. 23. Zus.), $o = p$, mithin $AB \parallel CD$ (Zus. 1).

Zusatz 3. Zwei gerade Linien EF und GH (Fig. 58), welche auf einer dritten CD senkrecht stehen, sind parallel; denn es ist $EFH + FHG = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ (Lehrs.).

§. 47.

Aufgabe. Durch einen Punkt E außerhalb einer geraden Linie AB (Fig. 54) eine Parallele zu ziehen.

Auflösung. Man ziehe von E zu einem beliebigen Punkte F der Linie AB eine gerade Linie EF, und zeichne an dem Punkte

E derselben auf der entgegengesetzten Seite von dem Winkel p den Winkel $o = p$, so ist $CD \parallel AB$ (§. 46. Zus. 1).

Die technische Lösung dieser Aufgabe mit Hilfe des Zusatzes 2 oder 3. §. 42 oder des Parallelen-Lineals!

§. 48.

Lehrsatz. Wenn zwei Parallellinien AB und CD (Fig. 53) von einer geraden Linie EF durchschnitten werden, so halten zwei innere auf einer Seite liegende Winkel m und p zusammen 180°.

Beweis. Wäre $m + p$ nicht $= 180°$, so müßte entweder $m + p < 180°$ oder $> 180°$ seyn; beides ist unmöglich. Denn wäre $m + p < 180°$, so müßten sich AB und CD auf der Seite dieser Winkel einmal schneiden (§. 39), folglich könnten sie nicht parallel seyn (§. 5). Wäre aber $m + p > 180°$, so wäre, da $m + o + p + n = 180° + 180° = 360°$ (§. 22. Zus. 4), ($m + p > 180°$ subtrahirt) $o + n < 180°$, mithin müßten sich AB und CD auf der Seite der Winkel o und n einmal schneiden (§. 39), wären also wieder nicht parallel. Es kann also $m + p$ nur $= 180°$ seyn.

Zusatz 1. Wenn zwei Parallelen AB und CD von einer geraden Linie EF geschnitten werden, so sind zwei innere Wechselwinkel o und p gleich; denn es ist $m + p = 180°$ (Lehrs.), aber auch $m + o = 180°$ (§. 22. Zus. 4), mithin $m + o = m + p$, und $o = p$.

Zusatz 2. Wenn zwei Parallelen AB und CD von einer geraden Linie geschnitten werden, so sind ein innerer und äußerer entgegengesetzter Winkel gleich; denn es ist $p = o$ (Zus. 1), aber $x = o$ (§. 23. Zus.), mithin auch $p = x$.

Zusatz. 3. Wenn eine gerade Linie EF auf einer von zwei Parallelen AB (Fig. 55) senkrecht steht, so steht sie auch auf der andern CD senkrecht; denn ist $m = 90°$, so ist auch $n = m = 90°$ (Zus. 1).

Zusatz 4. Durch einen Punkt E (Fig. 55) gibt es zu einer geraden Linie AB nur eine Parallele CD; denn wäre durch E noch eine andere etwa cd zu AB parallel, so ständen, wenn man EF senkrecht auf AB zieht, zwei verschiedene Linien DE und de in einem

und demselben Punkte E auf CD senkrecht (Zus. 3), welches unmöglich ist (§. 7. Zus. 4).

Zusatz 5. Wenn eine gerade Linie cd (Fig. 55) die eine CD von zwei Parallelen schneidet, so schneidet sie hinlänglich verlängert auch die andere AB; denn ist CD || AB, so kann cd nicht mit AB parallel seyn (Zus. 4), mithin muß cd die Linie AB einmal schneiden (§. 5. Zus.).

Zusatz 6. Wenn zwei gerade Linien AB und EF (Fig. 56) mit einer dritten CD parallel sind, so sind sie auch unter sich parallel: denn schneidet man die drei Linien durch eine gerade Linie GH, so ist $m = o$, weil AB || CD und $n = o$, weil EF || CD (Zus. 2), mithin $m = n$ und AB || EF (§. 46. Zus. 2).

Zusatz 7. Zwei Winkel m und n (Fig. 57), deren Schenkel je zwei und zwei parallel laufen, sind gleich: denn es schneidet der Schenkel ED des einen Winkels n einmal den zu seinem andern Schenkel EF parallelen Schenkel BC des Winkels m (Zus. 5), dann ist aber $m = o$ und $n = o$ (Zus. 2), mithin $m = n$.

§. 49.

Lehrsatz. Zwischen zwei Parallelen AB und CD (Fig. 58) sind alle senkrechten Linien gleich groß.

Beweis. Man fälle von zwei beliebigen Punkten E und G der Linie AB EF und GH senkrecht auf CD (§. 34), so stehen sie auch senkrecht auf AB (§. 48. Zus. 3). Zieht man EH, so ist $m = n$ (§. 48. Zus. 1), $F = G = 90°$ und $EH = EH$, mithin △ EFH ≅ △ EGH (§. 43), und folglich $EF = GH$.

Zusatz. Zwei Parallelen sind in allen Punkten gleichweit von einander entfernt (Lehrs. und §. 42. Zus. 3).

§. 50.

Lehrsatz. In einem jeden Dreieck beträgt die Summe aller drei Winkel 180°.

Beweis. Man ziehe zu einer Seite AC (Fig. 59) durch den ihr gegenüberliegenden Winkelpunkt B die Parallele EF (§. 47), so ist $r = m$ und $s = n$ (§. 48. Zus. 1); es ist aber $r + o + s = 180°$ (§. 22. Zus. 4), mithin ist auch $m + o + n = 180°$.

Zusatz 1. Wenn zwei Winkel o und n eines Dreieckes bekannt sind, so ist es auch der dritte m, denn es ist $m = 180^\circ - (o + n)$.

Zusatz 2. Im rechtwinkligen Dreieck sind die zwei an der Hypotenuse liegenden Winkel zusammen $= 90^\circ$.

Zusatz 3. Im gleichseitigen Dreieck ist jeder Winkel $= \frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$ (§. 26. Zus. 3).

§. 51.

Lehrsatz. Ein äußerer Winkel x (Fig. 59) eines Dreieckes ist den beiden ihm im Dreieck entgegengesetzten m und o zusammen gleich.

Beweis. Es ist $x + n = 180^\circ$ (§. 22. Zus. 4), aber auch $m + o + n = 180^\circ$ (§. 50), mithin $x + n = m + o + n$, und $x = m + o$.

Zusatz. Der äußere Winkel o an der Spitze eines gleichschenkligen Dreieckes ABC (Fig. 60) ist doppelt so groß als ein Winkel m oder n an der Grundseite desselben; denn es ist $o = m + n$ (Lehrs.), aber $m = n$ (§. 26. Zus. 2), mithin $o = m + m = 2m = 2n$.

§. 52.

Lehrsatz. In jedem geradlinigen Vielecke von n Seiten beträgt die Summe S aller Winkel am Umfange derselben $180^\circ . n - 360^\circ$.

Beweis. Man ziehe von einem beliebigen Punkte O innerhalb der Figur (Fig. 61) nach allen Ecken derselben gerade Linien, so wird diese dadurch in n Dreiecke getheilt, in welchen die Summe aller Winkel $180^\circ . n$ beträgt (§. 50). Es muß aber davon die Summe aller Winkel um den Punkt O herum, welche 360° beträgt (§. 22. Zus. 5), als nicht zu den Umfangswinkeln der Figur gehörig, davon abgezogen werden, mithin ist die Summe dieser $S = 180^\circ . n - 360^\circ$.

Zusatz 1. In allen geradlinigen Vielecken von gleich viel Seiten ist die Summe der Umfangswinkel gleich groß; im Vierecke 360°, im Fünfecke 540° rc.

Zusatz 2. Im regulären Vieleck (§. 9) beträgt jeder Umfangswinkel $\frac{180^\circ . n - 360^\circ}{n}$; im regulären Viereck 90, im regulären Fünfeck 108°, im regulären Sechseck 120° ꝛc. Ueberhaupt ist ein Umfangswinkel einer regulären Figur um so größer, je größer die Seitenanzahl n derselben ist, aber immer kleiner als 180°.

Zusatz 3. In regulären Vielecken von gleich viel Seiten ist jeder Umfangswinkel des einen Vieleckes so groß als einer des andern.

§. 53.

Aufgabe. Am Endpunkte A einer geraden Linie AB (Fig. 62) eine Senkrechte zu errichten.

Auflösung. Man schneide aus A von AB ein beliebiges Stück AC ab, zeichne darauf ein gleichschenkliges Dreieck ADC, verlängere CD über D hinaus, bis $DE = CD$ wird, und ziehe EA so steht diese senkrecht auf AB.

Beweis. Da $AD = CD = DE$ ist, so ist $m = n$ und $o = p$ (§. 26. Zus. 2). Es ist aber $EAC + n + p = 180^\circ$ (§. 50), oder, da $EAC = m + o$, $m + o + n + p = 180^\circ$, folglich auch $m + o + m + o = 180^\circ$ oder $2(m + o) = 180^\circ$, mithin $m + o = 90^\circ$ oder $EAC = 90^\circ$.

Fünfter Abschnitt.

Vom Parallelogramm und Trapez.

§. 54.

Lehrsatz. Ein Parallelogramm ABCD (Fig. 63) wird durch eine Diagonale BD in zwei congruente Dreiecke ABD und BDC getheilt.

Beweis. Da $AB \parallel CD$ und $AD \parallel BC$ ist (§. 12), so ist $m = n$ und $p = o$ (§. 48. Zus. 1), und weil $BD = BD$, $\triangle ABD \cong \triangle BCD$ (§. 43).

Zusatz 1. Im Parallelogramm sind je zwei gegenüberstehende Seiten und Winkel gleich; denn da $\triangle ABD \cong \triangle BCD$ (Lehrs.),

ist AB = CD und AD = BC (§. 24), dann A = C, und da m = n und o = p, m + o = n + p oder ABC = ADC.

Zusatz 2. Durch zwei anliegende Seiten AB und AD und den von ihnen eingeschlossenen Winkel A ist ein Parallelogramm bestimmt, und zwei Parallelogramme sind daher congruent, wenn sie zwei Seiten und den von ihnen eingeschlossenen Winkel gleich haben. Denn durch AB und AD ist auch CD = AB und BC = AD (Zus. 1), und durch A C = A, dann ABC = 180° — A (§. 48) und ADC = ABC (Zus. 1) bestimmt.

Zusatz 3. Wenn in einem Parallelogramm ABCD (Fig. 63) ein Winkel ein schiefer ist, so sind alle übrigen schief, und ist (Fig. 64) ein Winkel ein rechter, so sind es auch die übrigen (Zus. 2). Ein rechtwinkliges Parallelogramm heißt ein Rechteck.

Zusatz 4. Wenn in einem Parallelogramme ABCD (Fig. 65) zwei anliegende Seiten AB und AD gleich sind, so sind alle Seiten gleich (Zus. 1). Man nennt in diesem Fall das Parallelogramm eine Raute oder einen Rhombus, und wenn es überdieß rechtwinklig ist (Fig. 66), ein Quadrat.

Zusatz 5. Das Quadrat ist eine reguläre Figur (§. 9).

§. 55.

Lehrsatz. Ein Viereck ABCD (Fig. 63), in welchem je zwei gegenüberstehende Seiten AB und CD, AD und BC gleich sind, ist ein Parallelogramm.

Beweis. Man ziehe eine Diagonale BD, so ist, da AB = CD, AD = BC (Vorauss.) und BD = BD ist, $\triangle$ ABD $\cong$ $\triangle$ BCD (§. 27), mithin p = o und m = n, daher AD || BC und AB || CD (§. 46. Zus. 1), folglich ist ABCD ein Parallelogramm (§. 12).
Construction des Parallelen-Lineals!!

§. 56.

Aufgabe. Aus zwei Seiten AB und AD und dem von ihnen einzuschließenden Winkel A (Fig. 63) ein Parallelogramm zu zeichnen.

Auflösung. Man mache den einen Schenkel des Winkels A = AD und den andern = AB, beschreibe aus B mit einem Halbmesser = AD und aus D mit einem Halbmesser = AB Kreise (Kreisbögen),

und verbinde den Durchschnittspunkt C derselben mit den Punkten B und D durch gerade Linien CB und CD, so ist ABCD das verlangte Parallelogramm.

Beweis. Wenn man BD zieht, so sind im Dreieck ABD je zwei Seiten zusammen größer als die dritte (§. 28. Zus. 2); mithin müssen sich zwei aus B und D mit den Halbmessern AD und AB beschriebene Kreise schneiden. (§. 16). Es ist aber BC=AD und CD=AB, mithin ABCD ein Parallelogramm mit dem Winkel A und den gegebenen Seiten (§. 55), und zwar das einzige unter den gegebenen Voraussetzungen mögliche, da ein Parallelogramm durch zwei Seiten AD und AB und den von ihnen eingeschlossenen Winkel A bestimmt ist (§. 54. Zus. 2).

Zusatz 1. Ist A=90°, so erhält man ein Rechteck (§. 54. Zus. 3), und ist überdieß AB=AD, ein Quadrat (§. 54. Zus. 4).

Zusatz 2. Ebenso wie die vorige Aufgabe wird die gelös't: Ein Parallelogramm zu zeichnen, welches mit einem gegebenen congruent ist.

§. 57.

Lehrsatz. Ein Viereck ABCD (Fig. 63), in welchem zwei gegenüberstehende Seiten AB und CD gleich und parallel sind, ist ein Parallelogramm.

Beweis. Da AB || CD (Vorausſ.), so ist m = n (§. 48. Zus. 1), und da auch AB = CD (Vorausſ.) und BD = BD, $\triangle$ ABD $\cong$ $\triangle$ BCD (§. 25), mithin p = o u. AC || BC (§. 46. Zus. 1.), also ABCD ein Parallelogramm (§. 12.)

Zusatz. Wenn zwei gerade Linien AB und CD zu einer dritten EF (Fig. 67) parallel und gleich weit von ihr entfernt sind, so fallen sie ihrer Lage nach in eine einzige gerade Linie zusammen. Dann zieht man von zwei Punkten B und C der Linien AB und CD auf EF die Senkrechten BG und CH, so sind diese die Entfernungen der Linien AB und CD von EF (§. 42. Zus. 3 und §. 49. Zus.). Es ist aber BG = CH (Vorausſ.) und BG || CH (§. 46. Zus. 3), mithin BH ein Parallelogramm (Lehrs.) und BC || GH (EF) (§. 12), folglich müssen die mit EF parallelen Linien AB und CD (Vorausſ.) der Lage nach mit BC zusammenfallen,

und also in einer geraden Linie liegen, da es sonst sowohl durch B, als auch durch C zwei verschiedene Parallelen zu EF geben müßte, welches unmöglich ist (§ 48. Zus. 4).

§. 58.

Erklärung. Unter Höhe eines Parallelogrammes oder Trapezes ABCD (Fig. 13 und 14) versteht man eine gerade Linie BE, welche zwischen der Grundseite AD und ihrer Parallele BC senkrecht auf jene gezogen ist (Vergl. §. 49).

Zusatz. Im Rechtecke (Fig. 64) ist eine AD von zwei anliegenden Seiten die Grundseite, die andere AB die Höhe desselben.

§. 59.

Lehrsatz. Zwei Parallelogramme AEFD und ABCD (Fig. 68, 69, 70) auf der nämlichen Grundseite AD und zwischen denselben Parallelen sind gleich.

Beweis. In den drei Lagen, welche die Parallelogramme gegeneinander haben können, ist $AB = CD$, $AE = DF$ (§ 54. Zus. 1). ferner, da $AB \parallel CD$ und $AE \parallel DF$, $m = n$ (§. 48. Zus. 7). Es ist daher $\triangle ABE \cong \triangle CDF$ (§. 25), und folglich $ABFD - \triangle ABE = ABFD - \triangle CDF$ oder $AEFD = ABCD$.

Zusatz. Parallelogramme von gleichen Grundlinien und Höhen sind gleich. Denn man lege sie mit ihren Grundlinien aufeinander, so decken sich diese (§. 3. Zus. 3); es stehen dann die Parallelogramme auf der nämlichen Grundlinie und, weil sie gleiche Höhen haben (§. 58.), liegen sie zwischen denselben Parallelen (§. 58. und §. 57. Zus.), folglich sind sie gleich (Lehrs.).

§. 60.

Aufgabe. Ein Parallelogramm ABCD (Fig. 70) in ein anderes mit einem gegebenen Winkel o zu verwandeln.

Auflösung. Man zeichne im Punkte A an AD einen Winkel $DAG = o$ (§. 31.), verlängere den Schenkel AG desselben, bis er BC oder deren Verlängerung schneidet (§. 48. Zus. 5), ziehe durch D zu AE die Parallele DF, bis sie BC oder ihre Verlängerung

schneidet, so ist AEFD ein Parallelogramm, weil AE || DF und AD || EF (§. 12.), und zwar das verlangte, da es den Winkel o hat und dem Parallelogramm ABCD gleich ist (§ 59.).

Zusatz. Nimmt man $o = 90^\circ$ (§. 53.), so wird AEFD ein Rechteck (§. 54. Zus. 3).

§. 61.

Lehrsatz. Wenn man durch irgend einen Punkt O der Diagonale BD eines Parallelogrammes ABCD (Fig. 71) Parallelen zu zwei anliegenden Seiten AB und BC zieht, so wird dadurch das Parallelogramm in vier Parallelogramme getheilt, von denen diejenigen, durch welche die Diagonale nicht geht, Ergänzungen an der Diagonale heißen, und gleich sind.

Beweis. Da GH || AB || CD und EF || BC || AD ist (§. 48. Zus. 6), so sind AO, EG, OC und HF Parallelogramme (§. 12). Es ist aber $\triangle$ ABD $\cong$ $\triangle$ BCD, $\triangle$ EBO $\cong$ $\triangle$ BGO und $\triangle$ HDO $\cong$ $\triangle$ DFO (§. 54); mithin ist auch $\triangle$ ABD — ($\triangle$ EBO + $\triangle$ HDO) = $\triangle$ BCD — ($\triangle$ BGO + $\triangle$ DFO) oder AO = OC.

§. 62.

Aufgabe. Ein Parallelogramm AEOH (Fig. 71) in ein anderes mit einer gegebenen Seite m zu verwandeln, welches mit ihm die gleiche Winkel hat.

Auflösung. Man verlängere eine Seite AH des Parallelogrammes, und mache die Verlangerung HD = m, ziehe durch D und O eine gerade Linie bis an die Verlängerung von AE. Aus AB und AD (und A) verzeichne man das Parallelogramm AC (§. 56), und verlängere EO, bis sie CD, und HO, bis sie BC schneidet, so ist OC das verlangte Parallelogramm.

Beweis. Da DO die eine HO von zwei Parallelen schneidet, so muß sie verlängert auch die andere AE in ihrer Verlängerung einmal schneiden (§. 48. Zus. 5). Nun sind AO und CO Ergänzungen an der Diagonale, mithin Parallelogramme und gleich (§. 61). Auch ist OF = HD = m, dann GOF = EOH = EAH (§. 23. Zus. und §. 54. Zus. 1), und folglich sind alle übrigen Winkel von OC denen von AO der Ordnung nach gleich (§. 54. Zus. 2).

§. 63.

Aufgabe. Ein Parallelogramm in ein anderes mit einem gegebenen Winkel und einer gegebenen Seite zu verwandeln.

Auflösung. Man verwandle das gegebene Parallelogramm in eines, welches den gegebenen Winkel hat (§. 60), und dieses in ein anderes mit der gegebenen Seite (§. 62), oder umgekehrt.

§. 64.

Lehrsatz. Ein jedes Dreieck ABD (Fig. 63) ist der Hälfte eines Parallelogrammes P gleich, welches mit ihm gleiche Grundlinie und Höhe hat.

Beweis. Ergänzt man das Dreieck ABD zum Parallelogramme ABCD (§. 56), so hat dieses mit dem Dreieck und also auch mit dem Parallelogramme P gleiche Grundlinie und Höhe (§. 42. Zus. 4 und §. 58), und es ist $\triangle ABD \cong \triangle BCD$ (§. 54), und daher $\triangle ABD = \frac{1}{2} ABCD$. Nun ist aber $ABCD = P$ (§. 59. Zus.), mithin ist auch $\triangle ABD = \frac{1}{2} P$.

Zusatz. Dreiecke, welche auf gleichen Grundlinien stehen, und gleiche Höhen haben (zwischen denselben Parallelen liegen (§. 57. Zus.) sind gleich, da sie die Hälften gleicher Parallelogramme (§. 59. Zus.) sind.

§. 65.

Aufgabe. Ein Dreieck ABC (Fig. 72) in ein anderes mit einem gegebenen Winkel o zu verwandeln.

Auflösung. Man ziehe durch B zu AC die Parallele BF (§. 47), zeichne im Punkte A an AC einen Winkel $GAC = o$ (§. 31), verlängere seinen Schenkel AG, bis er BF schneidet, und ziehe durch den Durchschnittspunkt D und durch C die gerade Linie DC, so ist ADC das verlangte Dreieck; denn es hat den gegebenen Winkel o, und ist dem Dreieck ABC gleich (§. 64).

§. 66.

Aufgabe. Ein Dreieck ABC (Fig. 73) in ein anderes mit einer gegebenen Seite m zu verwandeln, welches mit ihm einen Winkel p gleich hat.

Auflösung. Man verlängere die den Winkel p einschließenden Seiten AB und CB über B hinaus, mache BD = m und ziehe CD. Durch A ziehe man ferner zu CD die Parallele AE (§. 47), bis sie die Verlängerung von CB in E schneidet (§. 48. Zus. 5), und zwischen D und E die gerade Linie DE, so ist BED das verlangte Dreieck.

Beweis. Es ist BD = m (Auflös.), o = p (§. 23. Zus.), und da △CAD = △CED (§. 64. Zus.), auch △CAD − △CBD = △CED − △CBD oder △ABC = △BED, mithin ist BED das verlangte Dreieck.

§. 67.

Aufgabe. Ein Dreieck in ein anderes mit einem gegebenen Winkel und einer gegebenen Seite zu verwandeln.

Auflösung. Man verwandle das Dreieck in eines, welches den gegebenen Winkel hat (§. 65), und dieses in ein anderes mit der gegebenen Seite (§. 66), oder auch umgekehrt.

§. 68.

Aufgabe. Ein geradliniges Vieleck ABCDEF (Fig. 74) in ein Dreieck zu verwandeln.

Auflösung. Man ziehe eine Diagonale AC und zu dieser durch B eine Parallele (§. 47), verlängere dann die Seite DC, bis sie die Parallele in b schneidet, und ziehe Ab, so ist △ABC = △AbC (§. 64. Zus.), also ACDEF + △ABC = ACDEF + △AbC oder ABCDEF = AbDEF; es hat aber AbDEF um eine Ecke weniger als ABCDEF. Wiederholt man das angegebene Verfahren weiter (wie in Fig. 74 geschehen), so erhält man jedesmal eine neue Figur, die der vorherigen, durch Verwandlung erhaltenen gleich ist, aber eine Ecke weniger hat; man muß daher auf diese Art endlich ein Dreieck AdF erhalten, welches der gegebenen Figur ABCDEF gleich ist.

§. 69.

Lehrsatz. Wenn man eine der nicht parallelen Seiten CD eines Trapezes ABCD (Fig. 75) halbirt, und durch den Halbirungspunkt F mit einer der Parallelseiten die Linie FE parallel zieht, so

halbirt sie auch die andre AB von den nicht parallelen Seiten, und ist das arithmetische Mittel zwischen den Parallelseiten AD und BC.

Beweis. Man ziehe durch F GH || AB und verlängere BC, bis sie GH in H schneidet, so sind, da EF || AD || BH (§. 48. Zus. 6.) und AB || GH, AEFG und BEFH Parallelogramme (§. 12), mithin AE = FG, BE = FH und EF = AG = BH (§. 54. Zus. 1). Nun ist aber CF = DF = $\frac{1}{2}$ CD (Vorausf.), m = n (§. 23. Zus.) und r = s (§. 48. Zus. 1), mithin $\triangle$ CFH $\cong$ $\triangle$ GDF (§. 43), daher FH = FG und CH = GD. Es ist daher auch BE = FH = FG = AE = $\frac{1}{2}$ AB.

Ferner ist EF + EF = AG + BH oder 2EF = AG + (CH + BC) = AG + (GD + BC) = (AG + GD) + BC = AD + BC, und mithin EF = $\frac{1}{2}$ (AD + BC) (Arithm.).

Sechster Abschnitt.

Von den Figuren im Kreis und um den Kreis.

---

§. 70.

Lehrsatz. Jeder Centriwinkel ACB ist doppelt so groß, als ein Peripheriewinkel ADB, welcher mit ihm in demselben Kreise auf dem nämlichen Bogen AB steht (Fig. 76, 77, 78).

Beweis. Der Mittelpunkt C des Kreises liegt entweder 1) in einem Schenkel BD oder 2) zwischen den Schenkeln oder 3) außer den Schenkeln des Peripheriewinkels ADB.

Im ersten Fall (Fig. 76) ist ACB = 2ADB, da AC = BC (§. 51. Zus.).

Im zweiten und dritten Fall (Fig. 77 und 78) ist, wenn man durch die Spitze D des Peripheriewinkels den Durchmesser DE zieht, ECB = 2EDB und ACE = 2ADE (Nro. 1); mithin ist auch in Fig. 77 ECB + ACE = 2EDB + 2ADE = 2 (EBD + ADE), und in Fig. 78 ECB — ACE = 2EDB — 2ADE = 2 (EDB — ADE), oder in beiden Fällen ACB = 2ADB.

Zusatz 1. Alle Peripheriewinkel auf demselben Bogen im

nämlichen Kreise sind gleich; denn sie sind die Hälften eines und desselben Centriwinkels auf dem nämlichen Bogen.

Zusatz 2. Alle Peripheriewinkel, welche im nämlichen Kreise oder in congruenten Kreisen auf gleichen Bögen stehen, sind gleich als die Hälften ihrer gleichen Centriwinkel (§. 19. Zus. 4).

Zusatz 3. Ein jeder Peripheriewinkel ADB (Fig. 79), der auf einem Halbkreis steht, ist $=90°$; denn er ist die Hälfte seines Centriwinkels $ACB=180°$ (§. 22. Zus. 3).

Zusatz 4. Die Aufgabe „An einem Endpunkt A einer geraden Linie AB (Fig. 62) eine Senkrechte zu errichten" (Vergl. §. 53) kann auch so gelös't werden: Man beschreibe aus einem über AB liegenden Punkt D mit AD einen Kreis, welcher AB (oder deren Verlängerung) in C schneidet, ziehe durch C und D einen Durchmesser CE, und von E nach A eine gerade Linie, so steht diese senkrecht auf AB; denn es ist $EAC=90°$ (Zus. 3).

§. 71.

Lehrsatz. Eine gerade Linie AB (Fig. 80), welche im Endpunkt D eines Halbmessers (Durchmessers) auf demselben senkrecht steht, ist eine Tangente seines Kreises.

Beweis. Man wähle in AB einen willkührlichen Punkt E, und ziehe EC, so ist $EC>CD$, weil (Vorauss.) $EDC=90°$ ist (§. 42. Zus. 2); es liegt also jeder Punkt E der Linie AB, D ausgenommen, außerhalb des Kreises (§. 13. Zus. 4), mithin ist AB eine Tangente desselben (§. 13. Erkl.).

Zusatz 1. Der Halbmesser (Durchmesser) eines Kreises, welcher zu dem Berührungspunkt D einer Tangente AB desselben gezogen ist, steht auf dieser senkrecht. Denn stünde CD nicht senkrecht auf AB, so könnte man von C eine andere Senkrechte, etwa CE auf AB fällen, es wäre aber alsdann $CED=90°$ und mithin $CE<CD$ (§. 42. Zus. 2); daher läge der Punkt E der Linie AB innerhalb des Kreises (§. 13. Zus. 4), und folglich könnte AB keine Tangente seyn (§. 13. Erkl.).

Zusatz 2. Eine Linie DG senkrecht auf dem Berührungspunkt D einer Tangente AB errichtet, geht durch den Mittelpunkt C ihres Kreises; denn sie fällt ihrer Lage nach mit dem Halbmesser CD,

welcher nach dem Berührungspunkt D gezogen ist, zusammen, da dieser ebenfalls senkrecht auf der Tangente steht (Zus. 1), und in einem Punkt einer geraden Linie nur eine Senkrechte möglich ist (§. 7. Zus. 4).

§. 72.

Aufgabe. Durch einen gegebenen Punkt D (Fig. 80) einer Kreislinie zu ihr eine Tangente zu ziehen.

Auflösung. Man ziehe den Halbmesser CD, und errichte am Endpunkt desselben die Linie AB senkrecht (§. 70. Zus. 4 oder §. 53), so ist diese eine Tangente (§. 71).

Zusatz. Durch einen Punkt D einer Kreislinie gibt es zu derselben nur eine Tangente AB, weil es nach D nur einen Halbmesser CD (§. 3. Zus. 2), und am Endpunkte D desselben nur eine Senkrechte AB gibt (§. 7. Zus. 4).

§. 73.

Aufgabe. Durch einen außerhalb einer Kreislinie gegebenen Punkt A (Fig. 81) zu derselben zwei Tangenten zu ziehen.

Auflösung. Man verbinde den gegebenen Punkt A und den Mittelpunkt C des Kreises durch eine gerade Linie AC, halbire diese, und beschreibe aus dem Halbirungspunkt B darum einen Kreis. Durch die zwei Durchschnittspunkte E und D der beiden Kreise (§. 8. Zus. 4.) und den Punkt A ziehe man gerade Linien, so sind diese Tangenten der gegebenen Kreislinie.

Beweis. Man ziehe die Halbmesser CE und CD, so ist $AEC = 90^\circ$ und $ADC = 90^\circ$ (§. 70. Zus. 3); mithin sind AF und AG Tangenten des Kreises um C (§. 71).

§. 74.

Lehrsatz. Von den beiden Winkeln BDE und ADE (Fig. 82), welche eine Sehne DE mit einer Tangente AB eines Kreises bildet, ist jeder einem Peripheriewinkel gleich, der auf dem Bogen steht, welchen die Sehne zwischen sich nnd der Tangente abschneidet.

Beweis. Man ziehe zu dem Berührungspunkt D der Tangente den Durchmesser DF, die Sehne EF, dann zu einem belie-

bigen Punkt G des Bogens DE die Sehnen DG und EG, so ist BDF = ADF = 90° (§. 71. Zus. 1).

Nun ist 1) DEE = 90° (§. 70. Zus. 3), und daher auch DFE + EDF = 90° (§. 50. Zus. 2); da aber auch BDE + EDF = BDF = 90° ist, so ist BDE + EDF = DFE + EDF und BDE = DFE.

Zieht man FG, so ist 2) ADF = DGF = 90° (§. 70. Zus. 3) und FDE = FGE als Peripheriewinkel auf dem nämlichen Bogen (§. 70. Zus. 1), mithin ist auch ADF + FDE = DGF + FGE oder ADE = DGE.

§. 75.

Aufgabe. Um ein Dreieck ABC (Fig. 83) einen Kreis zu beschreiben.

Auflösung. Man halbire zwei beliebige Seiten AB und AC des Dreieckes durch Senkrechte (§. 33), so ist der Durchschnittspunkt F derselben der Mittelpunkt des verlangten Kreises, und BF (AF, CF) sein Halbmesser.

Beweis. Die Senkrechten DF und EF müssen sich in ihrer Verlängerung einmal schneiden (§. 39. Zus.). Nun ist BD = AD, BDF = ADF = 90° (Aufl.) und DF = DF folglich $\triangle$ BDF $\cong$ $\triangle$ ADF (§. 25) und BF = AF. Eben so ist AE = CE, AEF = CEF = 90° und EF = EF, mithin $\triangle$ AEF $\cong$ $\triangle$ CEF und AF = CF. Es ist also BF = AF = CF; mithin muß ein aus F mit dem Halbmesser BF beschriebener Kreis durch die drei Winkelpunkte B, A und C des Dreieckes gehen (§. 13. Zus. 4), und der Kreis ist um das Dreieck beschrieben, da die Seiten des letzteren Sehnen desselben sind (§. 14).

Zusatz 1. Durch drei Punkte A, B, C, die nicht in gerader Linie liegen, kann immer ein Kreis beschrieben werden.

Zusatz 2. Durch drei Punkte, die nicht in gerader Linie liegen, ist der Mittelpunkt und Halbmesser eines Kreises, und daher auch der Kreis selbst in Hinsicht auf Lage und Größe bestimmt.

Zusatz 3. Zwei Kreise können sich nur in zwei Punkten schneiden; denn hätten sie auch nur drei Punkte mit einander gemein, so wären es nicht zwei verschiedene, sondern nur ein einziger Kreis (Zus. 2).

§. 76.

Aufgabe. In ein Dreieck ABC (Fig. 84) einen Kreis einzuschreiben.

Auflösung. Man halbire zwei beliebige Winkel BAC und ACB des Dreieckes (§. 32); vom Durchschnittspunkt D der Halbirungslinien fälle man auf eine Seite AC eine Senkrechte DE, und beschreibe mit ihr aus D einen Kreis, so ist dieser in das Dreieck eingeschrieben.

Beweis. Es ist $BAC + ACB < 180^\circ$ (§. 38), und folglich um so mehr $\frac{1}{2} BAC + \frac{1}{2} ACB < 180^\circ$ oder $n + x < 180^\circ$; es müssen sich daher AC und BC schneiden (§. 39) und zwar innerhalb des Dreieckes. Fällt man nun aus D auch auf die Seiten AB und BC die Senkrechten DG und DF, so ist $m = n = \frac{1}{2} BAC$ (Aufl.), $AGD = AED = 90^\circ$ und $AD = AD$, mithin $\triangle AGD \cong \triangle AED$ (§. 43) und $DG = DE$. Eben so ist $x = y = \frac{1}{2} ACB$, $DEC = DFC = 90^\circ$ und $CD = CD$, folglich $\triangle DEC \cong \triangle DFC$ und $DE = DF$. Es ist also $DG = DE = DF$; daher sind auch DG und DF, so wie DE Halbmesser des aus D beschriebenen Kreises, und die Seiten des Dreieckes Tangenten desselben, da sie auf den Endpunkten der Halbmesser DG, DE und DF senkrecht stehen (§. 71); folglich ist der Kreis in das Dreieck eingeschrieben (§. 14).

§. 77.

Lehrsatz. Jede zwei gegenüberliegende Winkel eines im Kreise eingeschriebenen Viereckes ABDE (Fig. 85) halten zusammen 180°.

Beweis. Man ziehe die Halbmesser CA und CD, so ist $ABD = \frac{1}{2} ACD$ und $AED = \frac{1}{2}$ erhab. ACD (§. 70); mithin ist $ABD + AED = \frac{1}{2} ACD + \frac{1}{2}$ erhab $ACD = \frac{1}{2}$ (ACD + erhab. ACD) $= \frac{1}{2} \cdot 360^\circ$ (§. 22. Zus. 5) $= 180^\circ$.

Ferner ist $EAB + EDB + ABD + AED = 360^\circ$ (§. 42. Zus. 1), und daher, da $ABD + AED = 180^\circ$, auch $EAB + EDB = 180^\circ$.

Zusatz. Um ein schiefwinkliges Parallelogramm kann nie ein Kreis beschrieben werden (Lehrs. und §. 54. Zus. 3).

§. 78.

Aufgabe. Um ein Viereck ABDE (Fig. 85), in welchem

zwei gegenüberliegende Winkel BDE und BAE zusammen 180° halten, einen Kreis zu beschreiben.

Auflösung. Man beschreibe durch drei Winkelpunkte A, B und D des Viereckes einen Kreis (§. 75), so geht dieser aus durch E, und folglich ist der Kreis um das Viereck beschrieben.

Beweis. Ginge der Kreis nicht durch E, so müßte sein Halbmesser größer oder kleiner als die Entfernung CE des Punktes E von seinem Mittelpunkt C seyn (§. 13. Zus. 4). Gesetzt nun, er sei = CF, so könnte man DF und AF ziehen, und es wäre alsdann im Viereck ABDF BDF + BAF = 180° (§. 77); nun ist aber auch BDE + BAE = 180° (Voraussſ.), mithin müßte BDF + BAF = BDE + BAE seyn, welches unmöglich ist, da sowohl BDF größer oder kleiner als BDE, als auch BAF größer oder kleiner als BAE ist. Es muß daher der Kreis auch durch E gehen.

Zusatz. Um jedes rechtwinklige Parallelogramm (Rechteck, Quadrat) kann ein Kreis beschrieben werden (Aufg. und §. 54. Zus.)

§. 79.

Lehrsatz. Wenn die Peripherie eines Kreises (Fig. 86) in n gleiche Theile getheilt ist, und man zieht zwischen je zwei aufeinander folgenden Theilungspunkten Sehnen, so entsteht eine in den Kreis eingeschriebene reguläre Figur von n Seiten.

Beweis. Sind alle Bögen gleich, so sind auch die Sehnen gleich (§. 19. Zus. 4), folglich hat die Figur lauter gleiche Seiten. Es sind aber auch alle Winkel der Figur gleich, indem jeder ein Peripheriewinkel ist, welcher auf (n — 2) der gleichen Bögen steht, in welche der Kreis getheilt ist (§. 70. Zus. 2). Es ist daher die Figur regulär (§. 9) und in den Kreis eingeschrieben, da alle Seiten derselben Sehnen des Kreises sind (§. 14).

Zusatz 1. Um jedes reguläre Vieleck kann ein Kreis beschrieben werden. Denn durch die drei Winkelspitzen A, B und C kann man einen Kreis beschreiben (§. 75 Zus. 1) — sein Mittelpunkt sei O; so ist, da AO = CO, BO = BO und AB = BC (§. 9), △ ABO ≅ △ CBO (§. 27), und BCO = CBO = ABO = ½ ABC = ½ BCD = DCO (§. 24, §. 25 Zus. 2 und §. 9); da ferner auch noch BC = CD und CO = CO ist, so ist auch △ BCO ≅ △ CDO (§. 25), und DO = BO = CO = AO.

Eben so läßt sich zeigen, daß FO = EO = DO = CO ꝛc. ist; mithin läßt sich aus O um das reguläre Vieleck ein Kreis beschreiben (§. 13 Zus. 4).

Zusatz 2. Wenn man von dem Mittelpunkte O eines um ein reguläres Vieleck von n Seiten beschriebenen Kreises nach allen Winkelspitzen des Vieleckes Halbmesser zieht, so wird dasselbe in n congruente, gleichschenklige Dreiecke getheilt, und jeder Umfangswinkel der Figur halbirt (Zus. 1).

Zusatz 3. Der Mittelpunkt O eines um eine reguläre Figur beschriebenen Kreises ist nicht nur von allen Winkelspitzen (§. 13 Zus. 2), sondern auch von allen Seiten derselben gleichweit entfernt, und heißt deßwegen auch zugleich der **Mittelpunkt der regulären Figur.** Denn zieht man von O nach allen Seiten der Figur Senkrechte, wie OG, OH, OI ꝛc., so sind diese die Entfernungen des Punktes O von den Seiten (§. 42 Zus. 3); es ist aber ABO = CBO = $\frac{1}{2}$ ABC (Zus. 2), BGO = BHO = 90° und BO = BO, mithin $\triangle$ BGO $\cong$ $\triangle$ BHO (§. 43), und OG = OH. Eben so läßt sich zeigen, daß OG = OH = OI ꝛc. ist. Man nennt die Entfernung des Mittelpunktes einer regulären Figur von einer ihrer Seiten das **Apothema** derselben.

Zusatz 4. Alle die n Mittelpunktswinkel AOB, BOC ꝛc. einer regulären Figur von n Seiten sind gleich (Zus. 2 und §. 24), und da ihre Summe 360° beträgt (§. 22 Zus. 5), so ist ein solcher Winkel $= \frac{360^\circ}{n}$, also im regulären Viereck oder Quadrat $\frac{360^\circ}{4} = 90^\circ$, im regulären Fünfeck $\frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$ ꝛc.

Zusatz 5. Wenn man zwei an einer Seite liegende Winkel BAF und ABC eines regulären Vieleckes halbirt, so schneiden sich die Halbirungslinien AO und BO im Polygonsmittelpunkt O. Denn es fällt dieser mit dem Mittelpunkt des darum beschriebenen Kreises zusammen (Zus. 3); nun sind aber, wenn man BF und AC zieht, BAF und ABC gleichschenklige Dreiecke (weil AF = AB = BC), und da die Winkel BAF und ABC an der Spitze derselben halbirt sind (Voraussf.), so stehen die Halbirungslinien AO und BO senkrecht auf der Mitte der Sehnen BF und AC (§. 26), und schneiden sich daher im Mittelpunkt des um das reguläre Vieleck beschriebenen Kreises (§. 41), oder im Polygonsmittelpunkt. Aus demselben

Grunde schneiden sich auch die Senkrechten GO und HO, welche auf der Mitte zweier anliegender Seiten AB und BC eines regulären Vieleckes errichtet werden, im Mittelpunkte desselben.

Zusatz 6. Der Mittelpunkt des regulären Viereckes oder Quadrates (Fig. 66) ist der Durchschnittspunkt O der beiden Diagonalen desselben. Denn es ist $AB = AD$ (§. 54. Zus. 4), mithin $n = m$ (§. 26. Zus. 2), aber auch $o = m$ (§. 48. Zus. 1), folglich $n = o = \frac{1}{2} ADC$; eben so ist, weil $AD = DC$, $s = r$, aber auch $p = r$, mithin $s = p = \frac{1}{2} BAD$. Die beiden Diagonalen halbiren also auch zwei an einer Seite AD liegende Winkel ADC und BAD, und schneiden sich daher im Mittelpunkt O des regulären Vierecks (Zus. 5).

§. 80.

Aufgabe. Um ein reguläres Vieleck (Fig. 87) einen Kreis zu beschreiben.

Auflösung. Man suche den Mittelpunkt O des Vieleckes (§. 79. Zus. 5), und beschreibe aus demselben durch einen Winkelpunkt der Figur einen Kreis, so geht dieser auch durch alle übrigen Winkelpunkte (§. 79. Zus. 3. und §. 13. Zus. 4). Alle Seiten der Figur sind daher Sehnen des Kreises, und ist dieser um die Figur beschrieben (§. 14).

§. 81.

Aufgabe. In ein reguläres Vieleck (Fig. 87) einen Kreis einzuschreiben.

Auflösung. Man suche den Mittelpunkt O des regulären Vieleckes (§. 79. Zus. 5), fälle von O eine Senkrechte auf eine der Seiten derselben, und beschreibe damit aus O einen Kreis, so geht dieser durch die Endpunkte aller aus O auf die Seiten des Vieleckes gezogenen Senkrechten (§. 79. Zus. 3. und §. 13. Zus. 4), und jede Seite wird eine Tangente desselben (§. 71); folglich ist der Kreis in die Figur eingeschrieben (§. 14).

§. 82.

Lehrsatz. Wenn die Peripherie eines Kreises (Fig. 88) in n gleiche Theile getheilt ist, und man zieht zu allen Theilungspunkten

Tangenten, so entsteht eine um den Kreis beschriebene reguläre Figur von n Seiten.

Beweis. Man ziehe zu allen Theilungspunkten der Peripherie Halbmesser, so stehen die Tangenten auf denselben senkrecht (§. 71. Zus. 1), folglich muß jede Tangente die auf beiden Seiten ihr zunächst liegenden schneiden (§. 39. Zus.), und man erhält also eine um den Kreis beschriebene Figur von n Seiten (§. 14). Zieht man nun durch alle Theilungspunkte Sehnen, so entsteht eine in den Kreis eingeschriebene reguläre Figur (§. 79), in welchem AB = BC = CD ꝛc. ist. Ferner sind auch die Winkel BAG, ABG, CBH, BCH, DCI, CDI ꝛc., welche die Tangenten mit den Sehnen bilden, gleich, da sie alle Peripheriewinkeln, welche auf den gleichen Bögen (Voraussf.) AB, BC, CD ꝛc. stehen, gleich (§. 74), und diese unter sich gleich sind (§. 70. Zus. 2). Es sind daher auch die Dreiecke AGB, BHC, CID ꝛc. gleichschenklig (§. 44. Zus. 2) und congruent (§. 43), und daher die Winkel AGB, BHC, CID ꝛc., dann die Seiten AG, GB, BH, HC, CI, ID ꝛc. gleich, und folglich auch GB + BH = HC + CI = ID + DK ꝛc. oder GH = HI = IK ꝛc. Da nun in der um den Kreis beschriebenen Figur alle Winkel und Seiten gleich sind, so ist sie auch regulär (§. 9).

§. 83.

Aufgabe. In und um einen Kreis (Fig. 89) ein reguläres Viereck, Achteck, Sechszehneck ꝛc. zu beschreiben.

Auflösung. Man ziehe einen Durchmesser AB und durch diesen senkrecht einen andern CD, so wird dadurch der Kreis in vier gleiche Theile oder Quadranten getheilt (§. 18. Zus. 2). Zieht man nun zu den Theilungspunkten A, C, B und D Sehnen, so erhält man ein in den Kreis eingeschriebenes reguläres Viereck oder Quadrat (§. 79).

Halbirt man ferner jeden der vier Quadranten (§. 33. Zus.), so wird dadurch die ganze Kreisperipherie in 4. 2 = 8 gleiche Theile getheilt, und man erhält, wenn man durch zwei aufeinander folgende Theilungspunkte Sehnen zieht, ein in den Kreis eingeschriebenes reguläres Achteck.

Wiederholt man dieses Verfahren, so erhält man nach und

nach ein in den Kreis eingeschriebenes reguläres Sechszehneck, Zweiunddreißigeck ꝛc.

Zieht man durch jeden der Theilungspunkte der vier, acht, sechszehn ꝛc. gleichen Bögen Tangenten, so erhält man ein um den Kreis beschriebenes reguläres Viereck, Achteck, Sechszehneck ꝛc. (§. 82).

§. 84.

Lehrsatz. Die Seite AB (Fig. 87) eines regulären Sechsecks ist dem Halbmesser AO des darum beschriebenen Kreises gleich.

Beweis. Es ist $AOB = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$ (§. 79. Zus. 4), und weil $AO = BO$, $BAO = ABO$ (§. 26. Zus. 2). Ferner ist $BAO + ABO + AOB = 180^\circ$ (§. 50), oder $2BAO + AOB = 180^\circ$, und daher $2BAO = 180^\circ - AOB = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$, folglich $BAO = ABO = 60^\circ = AOB$, und mithin auch $AB = BO = AO$ (§. 44. Zus. 3).

Zusatz. Der Bogen einer Sehne AB, welche dem Halbmesser AO ihres Kreises gleicht, ist der sechste Theil der Peripherie desselben (ein Sextant), und umgekehrt (Lehrs. und §. 79).

§. 85.

Aufgabe. In und um einen Kreis (Fig. 90) ein reguläres Sechseck, Dreieck, Zwölfeck, Vierundzwanzigeck ꝛc. zu beschreiben.

Auflösung. Man theile die Kreisperipherie in sechs gleiche Bögen, indem man ihren Halbmesser sechsmal an ihr aufträgt (§. 84. Zus.). Zieht man nun durch zwei aufeinander folgende Theilungspunkte Sehnen, so erhält man ein in den Kreis eingeschriebenes reguläres Sechseck (§. 79).

Zieht man durch die Theilungspunkte A, E, C der doppelten Bögen Sehnen, so ergibt sich ein in den Kreis eingeschriebenes reguläres Dreieck.

Halbirt man ferner jeden Bogen, welchen eine Seite des Sechseckes einschließt (§. 33. Zus.), so wird dadurch die ganze Kreisperipherie in $6 . 2 = 12$ gleiche Bogen getheilt, und man erhält, wenn man durch zwei aufeinander folgende Theilungspunkte Sehnen zieht, ein in den Kreis eingeschriebenes reguläres Zwölfeck.

Wiederholt man dieses Verfahren, so erhält man nach und nach ein in den Kreis eingeschriebenes reguläres Vierundzwanzigeck, Achtundvierzigeck ꝛc.

Zieht man durch jeden der Theilungspunkte der drei, sechs, zwölf ꝛc. gleichen Bögen Tangenten, so erhält man ein um den Kreis beschriebenes reguläres Dreieck, Sechseck, Zwölfeck ꝛc. (§. 82).

Anmerkung. Außer dem regulären Dreieck, Viereck und denjenigen regulären Vielecken, welche durch Verdopplung der Seitenzahl jener entstehen, kann nur noch das Fünfeck, Zehneck ꝛc., dann das Fünfzehneck, Dreißigeck ꝛc. durch rein (elementar-) geometrische Construction in und um einen gegebenen Kreis beschrieben werden. Die Construction derselben setzt jedoch mehrere Sätze voraus, welche in diesem Lehrbuche keinen Raum finden konnten, und wurde daher übergangen.

§. 86.

Aufgabe. Durch technische Construction ein reguläres Vieleck von n Seiten in und um einen gegebenen Kreis zu beschreiben (Fig. 93).

Auflösung. Man lege den Mittelpunktswinkel des verlangten regulären Vieleckes $ACB = \frac{360^0}{n}$ (§. 79. Zus. 4) mit dem Transporteur in den den Mittelpunkt des Kreises, so ist auch der Bogen $AB = \frac{360^0}{n}$ (§. 22. Zus. 1), und mithin seine Sehne AB die Seite des in den Kreis einzuschreibenden regulären Vieleckes von n Seiten, die man nur nmal an der Peripherie des Kreises aufzutragen braucht (§. 79).

Ist dadurch die Kreisperipherie in n gleiche Theile getheilt, so ergibt sich auch das reguläre Vieleck von n Seiten um den Kreis, wenn man durch alle Theilungspunkte der gleichen Bögen Tangenten zieht (§. 82).

§. 87.

Aufgabe. Auf die Seite AB (Fig. 92) eines regulären Vieleckes von n Seiten ein reguläres Vieleck von nochmal so viel, also von 2n Seiten zu zeichnen.

Auflösung. Man beschreibe um das gegebene reguläre Vieleck einen Kreis (§. 80), fälle von seinem Mittelpunkt O die Senkrechte OM auf die Seite AB, verlängere sie über O hinaus, bis sie den Kreis in E schneidet, und beschreibe aus E mit dem Halbmesser EA einen Kreis, so ist AB die Seite eines in den letztern eingeschriebenen regulären Vieleckes von 2n Seiten.

Beweis. Zieht man EA und EB, so ist, da AM=BM (§. 44. Zus. 1), AME=BME=90° und EM=EM, $\triangle$ AME $\cong$ $\triangle$ BME (§. 25), und EA=EB; es geht daher der aus E mit dem Halbmesser EA beschriebene Kreis auch durch B (§. 13. Zus. 4). Nun ist AEB$=\frac{1}{2}$AOB (§. 70), AOB$=\frac{360^\circ}{n}$ (§. 79. Zus. 4), daher AEB$=\frac{1}{2}.\frac{360^\circ}{n}=\frac{360^\circ}{2n}$, und auch Bogen AB$=\frac{360^\circ}{2n}$ (§. 22. Zus. 1); mithin ist AB die Seite eines in den Kreis um E eingeschriebenen regulären Vieleckes von 2n Seiten (§. 79).

Zusatz. Durch Wiederholung des angegebenen Verfahrens wird nach und nach AB die Seite eines regulären Vieleckes von 4n, 8n, 16n ꝛc. Seiten.

§. 88.

Aufgabe. Auf eine gegebene Seite AB (Fig. 91) ein reguläres Sechseck, Zwölfeck ꝛc. zu zeichnen.

Auflösung. Man zeichne auf AB ein reguläres oder gleichseitiges Dreieck (§. 28. Zus. 1. und §. 26. Zus. 3), so erhält man durch Anwendung des in §. 87 angegebenen Verfahrens nach und nach auf AB ein reguläres Sechseck, Zwölfeck ꝛc.

§. 89.

Aufgabe. Auf eine gegebene Seite AB (Fig. 92) ein reguläres Achteck, Sechszehneck ꝛc. zu zeichnen.

Auflösung. Man zeichne auf AB ein reguläres Viereck oder Quadrat (§. 56. Zus. 1), und dann nach §. 87 ein reguläres Achteck, Sechszehneck ꝛc.

§. 90.

Aufgabe. Auf eine gegebene Seite AB (Fig. 93) durch

technische Construction ein reguläres Vieleck von n Seiten zu zeichnen.

Auflösung. Man zeichne mittelst eines Transporteurs an jedem der beiden Endpunkte A und B der Linie AB den halben Umfangswinkel des verlangten regulären Winkels $BAC = ABC = \frac{1}{2}$ $\left(\frac{180^\circ . n - 360^\circ}{n}\right)$ (§. 52. Zus. 2), und beschreibe aus der Spitze C des gleichschenkligen Dreieckes ABC (§. 44. Zus. 2) durch A und B einen Kreis; so ist $ACB = 180^\circ - (BAC + ABC)$ (§. 50. Zus. 1), oder $ACB = 180^\circ - 2BAC = 180^\circ - \left(\frac{180^\circ . n - 360^\circ}{n}\right) = \frac{360^\circ}{n}$, daher auch der Bogen $AB = \frac{360^\circ}{n}$ (§. 22. Zus. 1), und seine Sehne AB die Seite eines in diesen Kreis eingeschriebenen regulären Vieleckes von n Seiten (§. 79).

§. 91.

Lehrsatz. Jeder Kreis kann als ein in denselben eingeschriebenes reguläres Vieleck von unendlich vielen und unendlich kleinen Seiten betrachtet werden.

Beweis. Es sey AB (Fig. 94) die Seite eines in den Kreis eingeschriebenen regulären Vieleckes. Zieht man von dem Mittelpunkt C des darum beschriebenen Kreises die Linie CE senkrecht auf AB, so halbirt sie dieselbe (§. 44. Zus. 1) und den Bogen AB (§. 33. Zus.). Nun ist 2 Bgn. AE = Bgn. AB, und $AE > AD$ (§. 42. Zus. 2), mithin $2\,AE > 2\,AD$ oder $2\,AE > AB$, folglich 2 Bgn. AE − 2 AE < Bgn. AB − AB, und Bgn. AE − AE > ½ (Bgn. AB − AB), d. h. der Unterschied zwischen dem halben Bogen AE und seiner Sehne AE ist geringer, als selbst der halbe Unterschied zwischen dem ganzen Bogen AB und seiner Sehne AB.

Wiederholt man die Halbirungen der Bögen, und verbindet die Theilungspunkte durch Sehnen, so wird nach und nach der Unterschied zwischen einem solchen halben Bogen und seiner Sehne immer kleiner, und da man sich die Halbirungen bis ins Unendliche fortgesetzt denken kann, so klein, daß derselbe als verschwindend, und folglich der Bogen als mit seiner Sehne zusammenfallend be-

trachtet werden kann. Es werden aber dann sowohl der Bögen, als auch der Sehnen unendlich viele, und eben deßwegen wird auch jeder Bogen, so wie auch seine mit ihm zusammenfallende Sehne unendlich klein. Nun geben alle diese unendlich vielen und unendlich kleinen Bögen zusammen die Peripherie des Kreises, und die unendlich vielen und unendlich kleinen Sehnen den Perimeter eines regulären Vieleckes von unendlich vielen und unendlich kleinen Seiten (§. 79), und da jeder solche Bogen mit seiner Sehne zusammenfällt, so fällt auch die Peripherie des Kreises mit dem Perimeter dieses Vieleckes zusammen; folglich kann der Kreis als ein in denselben eingeschriebenes Vieleck von unendlich vielen und unendlich kleinen Seiten betrachtet werden.

Zusatz. Das Apothema des Kreises ist sein Halbmesser (§. 79. Zus. 3).

Siebenter Abschnitt.

Von den Verhältnissen der Linien und der Aehnlichkeit der Figuren.

---

§. 92.

Erklärung. Unter Verhältniß zweier Linien AB und BC versteht man das Verhältniß der Zahlen, welche man erhält, wenn man die Linien mit einerlei Maß mißt. Eben so bedeuten die Ausdrücke $AB \cdot BC$, $\frac{AB}{BC}$, AB^2, $\sqrt{AB}$ nichts Anderes, als das Product, den Quotienten, das Quadrat, die Quadratwurzel aus jenen Zahlen.

§. 93.

Lehrsatz. Wenn man auf dem einen Schenkel BA eines Winkels ABC (Fig. 95) von der Spitze B an lauter gleiche Theile BD, DE, EF, FG aufträgt, und durch die Theilpunkte D, E, F, G Parallelen zieht, so werden auch auf dem andern Schenkel BC von B an lauter gleiche Theile Bd, de, ef, fg abgeschnitten.

Beweis. Man ziehe durch d, e, f Parallelen zu BA,

so ist, da auch Dd || Ee || Ff || Gg ist (Voraussf.), $dm = DE$, $en = EF$, $fp = FG$ (§. 54. Zus. 1), und folglich, da auch $BD = DE = EF = FG$ (Voraussf.), $BD = dm = en = fp$; ferner ist auch $DBd = mde = nef = pfg$ und $BdD = dem = efn = fgp$ (§. 48. Zus. 2). Es ist daher $\triangle BDd \cong \triangle dme \cong \triangle enf \cong \triangle fpg$ (§. 43), und folglich $BD = de = ef = fg$.

§. 94.

Aufgabe. Eine gerade Linie AB (Fig. 96) in eine Anzahl gleicher Theile z. B. in 5 gleiche Theile zu theilen.

Auflösung. Man ziehe durch den einen Endpunkt A eine gerade Linie AC unter einem beliebigen Winkel zu AB, trage auf AC von A aus 5 gleiche Theile Ad, de etc., ziehe durch h und den andern Endpunkt B der Linie AB eine gerade Linie hB, und zu hB durch g, f, e, d Parallelen, so theilen diese die Linie AB in fünf gleiche Theile (§. 93).

§. 95.

Lehrsatz. Wenn in einem Dreieck ABC (Fig. 97) zu einer Seite AC eine Parallele DE gezogen wird, so stehen die abgeschnittenen Stücke der beiden andern Seiten mit ihren Ganzen und unter sich in Proportion, d. h. es ist

1) $BD : BA = BE : BC$
2) $DA : BA = EC : BC$
3) $DA : BD = EC : BE$.

Beweis. Man trage von B aus auf die eine Seite BA mehrere gleiche Theile Ba, ac, ce, eg auf, und ziehe durch die Punkte a, c, e, g Parallelen zu DE, so ist auch $Bb = bd = df = fh$ (§. 93). Nun entspricht dem Theil Ba der Seite BA auf der andern Seite BC der Theil Bb; ferner dem Theil $Bc = Ba + ac = 2Ba$ der einen Seite der Theil $Bd = Bb + bd = 2Bb$ auf der andern, dann ebenso dem Theil $Be = Ba + ac + ce = 3Ba$ auf der andern Seite der Theil $Bf = Bb + bd + df = 3Bb$ etc.; überhaupt entspricht einem Stücke $BD = mBa$ der einen Seite das Stück $BE = mBb$ der andern. Es stehen daher zwei von B aus abgeschnittene Stücke Ba und BD der Seite BA mit zweien Stücken

Bb und BE welche auf der andern Seite von den, durch die Theilpunkte jener gezogenen, Parallelen ab und DE abgeschnitten werden, in Proportion (Arithm.).

Folglich ist 1) $BD:BA=BE:BC$

Nun ist aber auch $BA:BD=BC:BE$

und $(BA-BD):(BC-BE)=BA:BC$ } (Arithm.).

d. h. $DA:EC=BA:BC$

oder 2) $DA:BA=EC:BC$

Da aber auch $BD:BA=BE:BC$ (Nro. 1),

so ist 3) $DA:BD=EC:BE$ (Arithm.).

Zusatz 1. Wenn in einem Dreieck ABC (Fig. 97) zu einer Seite AC eine Parallele DE gezogen wird, so verhalten sich die abgeschnittenen Stücke BD und BE der andern Seiten zu ihren Ganzen, wie die Parallele DE zur Seite AC. Denn zieht man durch D zu BC eine Parallele DF, so ist $BD:BA=CF:AC$ (Lehrs.); nun ist aber DEFC ein Parallelogramm, und daher $CF=DE$ (§. 54. Zus. 1),

folglich ist 1) $BD:BA=DE:AC$.

Da aber $BD:BA=DE:BC$ ist (Lehrs.),

ist auch 2) $BE:BC=DE:AC$ (Arithm.).

Zusatz 2. Wenn in einem Dreieck ABC (Fig. 98) zu einer Seite AC mehrere Parallelen DE, FG gezogen werden, so steht jedes Paar Stücke der einen Seite mit dem gegenüberliegenden Paar der andern Seite in Proportion. Denn es ist

im $\triangle$ BDE 1) $BF:FD=BG:GE$ (Lehrs.).

Ferner ist $BF:BD=BG:BE$

und im $\triangle$ ABC $BD:DA=BE:EC$

mithin 2) $BF:DA=BG:EC$ (Arithm.)

Da aber $BF:FD=BG:GE$ (Nro. 1) ist,

so ist auch 3) $FD:DA=GE:EC$.

Zusatz 3. Wenn eine gerade Linie DE zwei Seiten AB und BC eines Dreieckes ABC (Fig. 98) so theilt, daß die abgeschnittenen Stücke entweder mit den Ganzen oder unter sich in Proportion stehen, so ist diese Linie DE zur ungetheilten Seite AC des Dreieckes parallel. Denn wäre DE nicht parallel zu AC, so könnte man durch D zu AC eine andere Parallele etwa De ziehen; und es wäre dann

$BD:BA = Be:BC.$

Nun ist aber 1) $BD:BA = BE:BC$ (Vorauss.)

Es wäre daher $BE:BC = Be:BC$, folglich müßte $BE = Be$ (Arithm.) d. h. der Theil dem Ganzen gleich seyn, welches unmöglich ist.

Ist aber 2) $BD:DA = BE:EC$,

so ist auch $(BD + DA):(BE + EC) = BD:BE$

d. h. $BA:BC = BD:DE$

oder $BD:BA = BE:BC$,

mithin ist $DE \parallel AC$ (Nro. 1).

§. 96.

Aufgabe. Zu drei gegebenen geraden Linien m, n, o (Fig. 99) die vierte Proportionallinie zu suchen.

Auflösung. Man nehme auf dem einen Schenkel AC eines beliebigen Winkels BAC $AD = m$, $AC = n$, und auf dem andern Schenkel $AE = o$, ziehe DE und durch C $CB \parallel DE$, so ist AB die gesuchte Linie; denn es ist

$AD:AC = AE:AB$ (§. 95)

oder $m : n = o : AB$

Zusatz. Nimmt man $o = n$, so erhält man zu zwei gegebenen geraden Linien die dritte Proportionallinie (Arithm.).

§. 97.

Aufgabe. Eine gerade Linie AB (Fig. 100) so zu theilen, daß sich die Theile wie gegebene gerade Linien a, b, c erhalten.

Auflösung. Man ziehe unter einem beliebigen Winkel zu AB eine gerade Linie AE, trage darauf von A an die Linien $AC = a$, $CD = b$ und $DE = c$ nebeneinander, ziehe BE und durch D und C Parallelen zu BE, so sind AF, FG und GB die verlangten Theile;

denn es ist $AF:FG:GB = AC:CD:DE$ (§. 95. Zus. 2).

oder $AF:FG:GB = a : b : c$

§. 98.

Aufgabe. Einen zehntheiligen Maßstab zu verfertigen, auf welchen auch Scrupel angegeben sind.

Auflösung. Es sei AB (Fig. 101) ein in seine 10 Linien getheilter Decimal-Zoll. Man errichte an den Endpunkten A und B auf AB die Senkrechten AD und BE, und trage auf AD von A und auf BE von B aus 10 beliebige, aber unter sich gleiche Theile auf. Durch jede zwei von A und B gleichweit entfernte Theilpunkte ziehe man gerade Linien, theile auch den Zoll DE in seine 10 Linien, und verbinde die Punkte B und x, I und y, II und z ꝛc. von AB und DE durch gerade Linien. Setzt man nun an die Theilpunkte der Linie BE von B an der Ordnung nach die Ziffern 1, 2, 3, 4 ꝛc., so geben die zwischen den Schenkeln des Winkels EBx enthaltenen Theile der Linien m1, n2, o3 ꝛc. Scrupel an, und zwar jeder so viele, als die an seinen Endpunkt gesetzte Ziffer 1, 2, 3, 4 ꝛc. ausdrückt.

Beweis. Da AD || BE (§. 46. Zus. 3), und die auf den Linien AD und BE aufgetragenen Theile gleich sind, so sind alle, durch je zwei gleichweit von A und B entfernten Theilpunkte derselben gezogenen, geraden Linien m1, n2, o3 ꝛc. parallel und gleich (§. 57 und §. 54. Zus. 1) und eben deßwegen auch alle Schräglinien Bx, Iy, IIz ꝛc. parallel. Es ist also auch $DE = AB = 1''$. Da nun $a1 \parallel Ex$,

so ist	$B1 : BE = a1 : Ex$ (§. 95. Zus. 1)
oder	$1 : 10 = a1 : 1'''$
mithin	$a1 = \frac{1}{10}''' = 1''''$ (§. 20).
Da ferner	$b2 \parallel Ex$ ist, so ist wieder
	$B2 : BE = b2 : Ex$
oder	$2 : 10 = b2 : 1'''$
mithin	$b2 = \frac{2}{10}''' = 2''''$.

In gleicher Art läßt sich zeigen, daß $c3 = 3''''$, $d4 = 4''''$ ꝛc. ist.

Hätte man z. B. eine Linie von der Länge hi zu messen, so hielte diese, da $hi = h7 + ig + g7$, $h7 = BF = AB = 1''$, $ig = Bv = 5'''$ und $g7 = 7''''$ ist, $1''\ 5'''\ 7''''$ Dez. Maß.

Zusatz 1. Ist AB ein seiner 12 Linien getheilter Duodecimal-Zoll, und trägt man auf AD und BE 12 gleiche Theile, so erhält man einen zwölftheiligen Maßstab.

Zusatz 2. Betrachtet man AB als eine Länge von 10 Fußen oder auch 10 Ruthen, so stellen die Linien des wirklichen Maßstabes

Fuße oder Ruthen und die Scrupel desselben Zolle oder Fuße vor, und man erhält einen sogenannten **verjüngten Maßstab**. Hat ein verjüngter Maßstab eine Länge von 10 solchen Theilen wie AB (von 10 Zollen oder 1 Fuß), so heißt er ein **tausendtheiliger**.

Auf dem richtigen Gebrauch des verjüngten Maaßstabes beruht die niedere Feldmeßkunst.

§. 99.

Erklärung. Ebene geradlinige Figuren heißen **ähnlich**, wenn sie

1) gleichviel Seiten haben
2) die Winkel der Ordnung nach gleich sind und
3) ihre gleichliegenden Seiten (solche, welche gleiche Winkel einschließen oder ihnen gegenüberliegen) in Proportion stehen.

Das Zeichen der Aehnlichkeit ist $\backsim$.

Zusatz 1. Zwei Figuren, welche der nämlichen dritten ähnlich sind, sind auch unter sich ähnlich.

Zusatz 2. Zwei reguläre Figuren von gleichviel Seiten sind ähnlich; denn sie haben lauter gleiche Winkel (§. 52. Zus. 3), und da sowohl alle Seiten der einen, als auch der andern gleich sind (§. 9), so steht jedes Paar Seiten der einen mit einem Paar der andern in Proportion (Arithm.).

Zusatz 3. Alle Kreise sind als reguläre Figuren von unendlich vielen (§. 91), und mithin auch von gleichvielen Seiten ähnlich.

§. 100.

Lehrsatz. Wenn in einem Dreieck ABC (Fig. 103) zu einer Seite AC eine Parallele DF gezogen wird, so ist das abgeschnittene Dreieck BDE dem ganzen ABC ähnlich.

Beweis. Es ist $B = B$, $x = m$ und $y = n$ (§. 48. Zus. 2);

ferner $BD : BA = BE : BC$ (§. 95),

dann $BD : BA = DE : AC$

und $BE : BC = DE : AC$ (§. 95. Zus. 1),

mithin ist $\triangle BDE \backsim \triangle ABC$ (§. 99).

§. 101.

Aufgabe. Ein Dreieck mit einer Seite a zu erhalten, welches einem gegebenen ABC (Fig. 103) ähnlich ist.

Auflösung. Man mache auf AB BD=a, und ziehe durch D eine Parallele zu AC, so ist $\triangle$BDE ∾ $\triangle$ABC (§. 100).

§. 102.

Lehrsatz. Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn zwei Seiten des einen mit zwei Seiten des andern in Proportion stehen, und die von ihnen eingeschlossenen Winkel gleich sind.

Es ist also $\triangle$abc ∾ $\triangle$ABC (Fig. 102 und 103), wenn ba:BA =bc:BC und b=B ist.

Beweis. Man mache BD=ba, und ziehe durch D DE||AC so ist $\triangle$BDE ∾ $\triangle$ABC (§. 100) und

	BD:BA=BE:BC (§. 95)
Nun ist aber	ba:BA=bc:BC (Vorausf.)
mithin	BD:ba=BE:bc, und da BD=ba, auch

BE=bc (Arithm.). Da nun auch noch B=b ist (Vorausf.), so ist $\triangle$BDE ≅ $\triangle$abc (§. 25), und also auch $\triangle$abc ∾ $\triangle$ABC.

§. 103.

Lehrsatz. Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn die drei Seiten des einen mit den drei Seiten des andern in Proportion stehen. Es ist also $\triangle$abc ∾ $\triangle$ABC (Fig. 102 und 103), wenn ba:BA =bc:BC=ac:AC ist.

Beweis. Man mache BD=ba, und ziehe durch D DE||AC, so ist $\triangle$BDE ∾ $\triangle$ABC (§. 100), und

	BD:BA=DE:BC (§. 95)
Nun ist aber	ba:BA=bc:BC (Vorausf.)
mithin	BD:ba=BE:bc, und weil BD=ba,

auch BE=bc (Arithm.).

Eben so ist	BD:BA=DE:AC (§. 95. Zus. 1),
aber auch	ba:BA=ac:AC (Vorausf.)
daher	BD:ba=DE:ac
und weil	BD=ba, auch DE=ac.

Da nun BD=ba, BE=bc und DE=ac ist, so ist △ BDE ≅ △ abc (§. 27), und mithin auch △ abc ∾ △ ABC.

Zusatz. Mit Hilfe des verjüngten Maßstabes (§. 98. Zus. 2) läßt sich auf dem Papier ein Dreieck abc zeichnen, welches einem Dreiecke ABC auf dem Felde ähnlich ist. Man zeichne nämlich aus den Linien ac, ab und bc, welche eben so viel Fuße, Zolle ꝛc. des verjüngten Maßstabes enthalten, als die Seiten AC, AB und BC des Dreieckes ABC im wirklichen, das Dreieck abc (§. 28), so stehen die Seiten von abc mit denen von ABC in Proportion (Arithm.), und es ist daher △ abc ∾ △ ABC (Lehrs.). In gleicher Art kann auch ein Winkel ABC auf dem Felde auf das Papier gebracht werden; denn man zeichne △ abc ∾ △ ABC, so ist abc=ABC (§. 99).

§. 104.

Lehrsatz. Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn zwei Winkel des einen gleich sind zweien Winkeln des andern.

Es ist also △ abc ∾ △ ABC (Fig. 102 und 103), wenn b=B und a=A ist.

Beweis. Man mache BD=ba, und ziehe durch D DE||AC, so ist △ BDE ∾ △ ABC (§. 100). Es ist aber, weil BD=ba, B=b und x=A=a (Voraussf. und §. 48. Zus. 2), △ BDE ≅ △ abc (§. 43), folglich auch △ abc ∾ △ ABC.

Zusatz. Zwei rechtwinklige Dreiecke sind ähnlich, wenn sie einen spitzigen, und zwei gleichschenklige, wenn sie irgend einen Winkel gleich haben (§. 26. Zus. 2. und §. 50. Zus. 1).

§. 105.

Aufgabe. Auf eine gegebene Seite ac (Fig. 102) ein Dreieck zu zeichnen, welches einem andern ABC (Fig. 103) ähnlich ist.

Auflösung. Man zeichne an den Endpunkten a und c der Linie ac die Winkel dac=BAC und ace=ACB, verlängere ihre Schenkel ad und ce, bis sie sich in b schneiden (§. 38. und §. 39), so ist △ abc ∾ △ ABC (§. 104).

§. 106.

Aufgabe. Auf eine Linie ab (Fig. 105) ein geradliniges

Vieleck zu zeichnen, welches einem gegebenen ABCDEF (Fig. 104) ähnlich ist.

Auflösung. Man ziehe die Diagonalen AC, AD, AE, zeichne auf ab $\triangle abc \backsim \triangle ABC$, auf ac $\triangle acd \backsim \triangle ACD$ ꝛc. (§. 105), so erhält man ein geradliniges Vieleck abcdef $\backsim$ ABCDEF.

Beweis. Die Figur abcdef hat offenbar eben so viel Seiten als ABCDEF. Weil ferner $\triangle abc \backsim \triangle ABC$ ist (Aufl.), so ist $b = B$, $bca = BCA$, $ab : AB = bc : BC$ und $bc : BC = ac : AC$ (§. 99), und da $\triangle acd \backsim \triangle ACD$, $acd = ACD$, mithin auch $bca + acd = BCA + ACD$ oder $bcd = BCD$,

$$\begin{array}{ll} \text{dann} & cd : CD = ac : AC \\ \text{und da} & bc : BC = ac : AC \\ \hline & bc : BC = cd : CD \end{array}$$

In gleicher Art läßt sich die Gleichheit aller übrigen Winkel und die Proportion der dieselben einschließenden Seiten nachweisen; folglich ist abcdef $\backsim$ ABCDEF (§. 99).

Zusatz 1. Macht man (Fig. 104) $Ab = ab$, zieht durch b $bc \parallel BC$, durch c $cd \parallel CD$ ꝛc., so erhält man ebenfalls ein Vieleck Abcdef $\backsim$ ABCDEF; denn es ist $\triangle Abc \backsim \triangle ABC$, $\triangle Acd \backsim \triangle ACD$ ꝛc. (§. 100), folglich auch Abcdef $\backsim$ ABCDEF (Bew. d. Aufg.).

Zusatz 2. Geradlinige ähnliche Vielecke abcdef und ABCDEF werden durch gleichliegende Diagonalen in lauter Dreiecke zerlegt, von welchen jede zwei gleichliegende ähnlich sind (Aufl. d. Aufg.).

Zusatz 3. In ähnlichen geradlinigen Vielecken stehen gleichliegende Seiten mit gleichliegenden Diagonalen in Proportion (Zus. 2 und §. 99).

§. 107.

Lehrsatz. Die Perimeter zweier ähnlicher Vielecke verhalten sich wie ein Paar gleichliegende Seiten oder Diagonalen derselben.

Beweis. Wenn abcdef $\backsim$ ABCDEF (Fig. 104 und 105), so ist $ab : AB = bc : BC = cd : CD = de : DE = ef : EF = fa : FA$ (§. 99); mithin ist auch
$(ab + bc + cd + de + ef + fa) : (AB + BC + CD + DE + EF + FA) = ab : AB = bc : BC = cd : CD$ ꝛc. (Arithm.) oder Perim. abcdef : Perim. ABCDEF $= ab : AB = bc : BC = cd : CD$ ꝛc.

Da ferner ab:AB=ac:AC=ad:AD (§. 106. Zus. 3), so ist auch Perim. abcdef: Perim. ABCDEF=ac:AC=ad:AD ꝛc.

Zusatz 1. Die Perimeter zweier regulärer Vielecke von gleichviel Seiten (Fig. 106 und 107) verhalten sich wie die Halbmesser oder Durchmesser der um sie beschriebenen Kreise. Denn es sind die Figuren ähnlich (§. 99. Zus. 2), mithin ist

Perim. abcdef: Perim. ABCDEF=ab:AB (Lehrs.)

Nun sind aber die gleichschenkligen Dreiecke abo und ABO ähnlich, da $o=O=\frac{360^\circ}{n}$ ist (§. 104. Zus. und §. 79. Zus. 4) folglich ist ab:AB=ao:AO (§. 99), und daher

Perim. abcdef: Perim. ABCDEF=ao:AO=r:R=2r:2R=d:D.

Zusatz 2. Die Peripherien der Kreise verhalten sich wie ihre Halb- oder Durchmesser (§. 99. Zus. 3).

§. 108.

Lehrsatz. In ähnlichen Dreiecken abc und ABC (Fig. 108 und 109) verhalten sich die Höhen bd und BD wie zwei gleichliegende Seiten.

Beweis. Es ist, weil $\triangle abc \sim \triangle ABC$, a=A (§. 99), ferner adb=ADB=90° (§. 42. Zus. 4), mithin $\triangle adb \sim \triangle ADB$ (§. 104), und daher

bd:BD=ab:AB (§. 99).

Nun ist aber auch in den ähnlichen Dreiecken abc und ABC ab:AB =bc:BC=ac:AC. Es ist daher bd:BD=ab:AB=bc:BC =ac:AC.

Zusatz. Mit Hilfe des verjüngten Maßstabes kann die Höhe BD eines Dreieckes ABC auf dem Felde durch Zeichnung auf dem Papier gefunden werden. Man messe nämlich die Grundseite AC des Dreieckes ABC mit dem landesüblichen Maß, zeichne auf dem Papier auf eine Linie ac, welche eben so viele verjüngte Maßeinheiten enthält, als AC wirkliche, $\triangle abc \sim \triangle ABC$ (§. 103. Zus. und §. 105) und messe mit dem verjüngten Maßstab die Höhe bd desselben, so gibt die Anzahl der in bd enthaltenen verjüngten Maßeinheiten die Zahl der in BD enthaltenen wirklichen; denn es ist bd:BD=ac:AC (Lehrs.), und da AC eben so viel wirkliche

Maßeinheiten enthält, als ao verjüngte, so muß auch BD eben so viel wirkliche, als bd verjüngte enthalten (Arithm.).

§. 109.

Lehrsatz. Wenn man in einem rechtwinkligen Dreieck ABC (Fig. 110) von der Spitze B des rechten Winkels ABC auf die Hypotenuse eine Senkrechte BD fällt, so ist diese die mittlere geometrische Proportionallinie zwischen den Abschnitten AD und DC der Hypotenuse.

Beweis. Es ist A=A und ADB=ABC=90° (Vorausf.), mithin $\triangle$ABD$\sim$$\triangle$ABC (§. 104), dann C=C, und BDC=ABC=90°, mithin $\triangle$BDC$\sim$$\triangle$ABC, und folglich auch $\triangle$ABD $\sim$$\triangle$BDC (§. 99. Zus. 1). Es ist daher

AD:BD=BD:DC (§. 99) oder

AD : BD : DC (Arithm.).

Zusatz 1. Eine gerade Linie BD, welche von irgend einem Punkte B der Peripherie eines Kreises (Fig. 111) auf einen Durchmesser AC desselben senkrecht gezogen ist, ist die mittlere geometrische Proportionallinie zwischen den Abschnitten AD und DC des Durchmessers. Denn zieht man die Sehnen AB und BC, so ist ABC=90° (§. 70. Zus. 3), mithin im rechtwinkligen Dreieck ABC AD:BD:DC (Lehrs.).

Zusatz 2. Setzt man EA=r, mithin AC=2r, AD=x, also DC=AC—AD=2r—x und BD=y,

so ist $x:y:2r-x$,

und daher $y^2=(2r-x)x=2rx-x^2$

und $y=\pm\sqrt{(2rx-x^2)}$.

§. 110.

Aufgabe. Zu zwei geraden Linien m und n (Fig. 111) die mittlere geometrische Proportionallinie zu suchen.

Auflösung. Man mache auf einer geraden Linie AD=m und DC=n, halbire AC, und beschreibe darum einen Kreis, errichte dann in D die Senkrechte BD, so ist diese die mittlere geometrische Proportionallinie; denn es ist

AD:BD:DC (§. 109. Zus. 1), oder

m:BD: n.

§. 111.

Lehrsatz. Wenn man die Seiten eines rechtwinkligen Dreieckes ABC (Fig. 115) mit einerlei Maß mißt, also ihre Größe in Zahlen ausdrückt, so ist die Quadratzahl der Hypotenuse den Quadratzahlen der beiden Katheten zusammengenommen gleich.

Beweis. Man fälle von der Spitze B des rechten Winkels ABC auf die Hypotenuse AC die Senkrechte BD, so ist $\triangle ABD \sim \triangle ABC$ und $\triangle BDC \sim \triangle ABC$ (§. 109. Bew. d. Lehrs.).

Es ist daher	$AD : AB = AB : AC$ (§. 99)
und	$AD . AC = AB^2$ (Arithm.),
ferner	$DC : BC = BC : AC$
und	$DC . AC = BC^2$
Folglich ist auch	$AD . AC + DC . AC = AB^2 + BC^2$
oder	$(AD + DC) . AC = AB^2 + BC^2$
d. h.	$AC . AC = AB^2 + BC^2$
also	$AC^2 = AB^2 + BC^2$.

Zusatz 1. Bezeichnen (der Kürze wegen) h, a und b Zahlen, welche die Größe der Hypotenuse und der beiden Katheten, mit einerlei Maß gemessen, ausdrücken, so ist

	$h^2 = a^2 + b^2$
und	$h = \sqrt{(a^2 + b^2)}$,
ferner	$a^2 = h^2 - b^2$
und	$a = \sqrt{(h^2 - b^2)} = \sqrt{(h + b)(h - b)}$.

Beispiel 1. Wie groß ist die Seite eines in den Kreis eingeschriebenen Quadrates (Fig. 89), wenn der Halbmesser des Kreises 4′ 5″ Dez. Maß hält?

Auflösung. Da AD $= 90^\circ$ ist (§. 79. Zus. 4), so ist $AD = \sqrt{(AO^2 + DO^2)} = \sqrt{(r^2 + r^2)} = \sqrt{2r^2} = r\sqrt{2} = r . 1,4142 \ldots$, und also in diesem Fall $= 4,5' . 1,4142 \ldots = 6,3639' = 6'\ 3''\ 6'''\ 4''''$ Dez. Maß beinahe.

Beispiel 2. Wie groß ist die Kathete eines rechtwinkligen Dreieckes im Duodezimalmaß, wenn die andere Kathete 12′ und die Hypotenuse 16′ hält?

Auflösung. Es ist $a = \sqrt{(h + b)(h - b)}$, mithin in diesem Fall $= \sqrt{(16 + 12)(16 - 12)} = \sqrt{28 . 4} = \sqrt{112} = 10,5830' \ldots = 10'\ 7''$ Duod. Maß beinahe.

Zusatz 2. Wenn in einem Dreieck ABC (Fig. 112) die Quadratzahl einer Seite AC so groß ist, als die Quadratzahlen der beiden andern Seiten zusammen, so liegt jener gegenüber ein rechter Winkel. Denn man errichte in B auf CB die Senkrechte BD=AB, und ziehe CD, so ist das Dreieck BCD rechtwinklig, und daher $CD^2 = BC^2 + BD^2 = BC^2 + AB^2$ (Lehrs.); nun ist aber auch $AC^2 = BC^2 + AB^2$ (Voraussf.), mithin $AC^2 = CD^2$ und $AC = CD$. Da nun $AC = CD$, $AB = BD$ und $BC = BC$ ist, so ist $\triangle ABC \cong \triangle BCD$ (§. 27) und $ABC = DBC = 90°$ (§. 24).

Zusatz 3. Wenn in einem Dreieck ABC sich die Seiten AB, BC, AC wie die Zahlen 3:4:5 verhalten, so liegt AC ein rechter Winkel gegenüber. Denn stehen die Seiten des Dreieckes zu einander in dem angegebenen Verhältniß, so muß $AC = 5m$, $AB = 4m$ und $BC = 3m$ seyn (wo m das gemeinschaftliche Maß der drei Seiten bezeichnet); es ist aber dann $AC^2 = 25m^2$, und $AB^2 + BC^2 = 16m^2 + 9m^2 = 25m^2$, mithin $AC^2 = AB^2 + BC^2$, folglich liegt dem AC ein rechter Winkel gegenüber (Zus. 2).

§. 112.

Aufgabe. Die Entfernung einer Sehne AB (Fig. 94) vom Mittelpunkt C ihres Kreises aus dem Halbmesser desselben durch Rechnuug zu finden.

Auflösung. Man fälle vom Mittelpunkt C auf die Sehne AB die Senkrechte CD, so ist diese ihre Entfernung von demselben. Zieht man ferner den Halbmesser AC, so ist $CD^2 = AC^2 - AD^2$ (§. 111. Zus. 1), oder, da $AD = \frac{1}{2} AB$ (§. 44. Zus. 1) und $AD^2 = (\frac{1}{2} AB)^2 = \frac{1}{4} AB^2$, $CD^2 = AC^2 - \frac{1}{4} AB^2$ und $CD = \sqrt{(AC^2 - \frac{1}{4} AB^2)}$. Bezeichnet man den Halbmesser mit r, die Sehne mit c und ihre Entfernung vom Mittelpunkt mit a, so ist $a = \sqrt{(r^2 - \frac{1}{4} c^2)}$.

Zusatz 1. Gleiche Sehnen sind im nämlichen Kreise oder in congruenten Kreisen gleichweit vom Mittelpunkt entfernt.

Zusatz 2. Die Entfernung einer Sehne vom Mittelpunkt ist um so größer, je kleiner diese ist. Wenn daher eine Sehne unendlich klein ist (wenn sie keine angebliche Größe mehr hat), so ist ihre Entfernung vom Mittelpunkt dem Halbmesser ihres Kreises gleich; denn es ist dann $c = 0$, mithin $a = \sqrt{(r^2 - 0)} = \sqrt{r^2} = r$. (Vergl. §. 91. Zus.).

§. 113.

Aufgabe. Aus der Seite $AB = c$ (Fig. 94) eines regulären Vieleckes von n Seiten und dem Halbmesser $AC = r$ des darum beschriebenen Kreises die Seite eines regulären Vieleckes von nochmal so viel, also von 2n Seiten durch Rechnung zu finden.

Auflösung. Man halbire den Bogen AB (§. 33. Zus.), so steht die Halbirungslinie CE senkrecht auf AB, und es ist AE die Seite eines regulären Vieleckes von 2n Seiten (§. 79). Nun ist $AE^2 = AD^2 + DE^2$ *) (§. 111); dann $AD = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} c$ (§. 33. Zus.) und $AD^2 = \frac{1}{4} c^2$, ferner $DE = CE - CD$ und $DE^2 = (CE - CD)^2 = CE^2 - 2CE.CD + CD^2$, oder, da $CE = r$, $CD = \sqrt{(r^2 - \frac{1}{4} c^2)}$ und $CD^2 = r^2 - \frac{1}{4} c^2$ (§. 112) ist, $DE^2 = r^2 - 2r\sqrt{(r^2 - \frac{1}{4} c^2)} + r^2 - \frac{1}{4} c^2$. Setzt man diese Werthe von AD^2 und DE^2 in *), so ist $AE^2 = \frac{1}{4} c^2 + r^2 - 2r\sqrt{(r^2 - \frac{1}{4} c^2)} + r^2 - \frac{1}{4} c^2$ oder $AE^2 = 2r^2 - 2r\sqrt{(r^2 - \frac{1}{4} c^2)}$, mithin $AE = \sqrt{(2r^2 - 2r\sqrt{(r^2 - \frac{1}{4} c^2)})}$.

§. 114.

Lehrsatz. Das Verhältniß des Durchmessers zu der Peripherie eines Kreises ist (annäherungsweise) $= 1 : 3,1415 \ldots$

Beweis. Man setze den Halbmesser des Kreises $= 1$, mithin seinen Durchmesser $= 2$, so ist die Seite des in den Kreis eingeschriebenen Sechseckes $c = r = 1$ (§. 84). Sucht man die Seite des eingeschriebenen regulären Zwölfeckes, so ist diese (§. 113) $= \sqrt{(2r^2 - 2r\sqrt{(r^2 - \frac{1}{4} c^2)})} = \sqrt{(2 - 2\sqrt{(1 - \frac{1}{4})})} = \sqrt{(2 - 2\sqrt{\frac{3}{4}})} = \sqrt{(2 - 2.\frac{1}{2}\sqrt{3})} = \sqrt{(2 - \sqrt{3})} = \sqrt{(2 - 1,7320508 \ldots)} = \sqrt{0,2679492} = 0,5176 \ldots\ldots$ Eben so findet man die Seite des Vierundzwanzigeckes, Achtundvierzigeckes 2c. Setzt man dieses Verfahren fort, bis man die Seite eines 768 Eckes erhält, und multiplicirt diese mit 768, so findet man den Umfang dieses Vieleckes $= 6,2830 \ldots\ldots$ Da nun der Umfang des erwähnten Vieleckes von der Peripherie des darum beschriebenen Kreises wenig mehr abweicht, so verhält sich der Durchmesser des Kreises zu seiner Peripherie wie $2 : 6,2830 \ldots$ oder wie $1 : 3,1415 \ldots$

Würde man das angegebene Verfahren noch weiter fortsetzen und mit mehr Dezimalstellen rechnen, so erhielte man das Verhält-

niß des Durchmessers zur Kreisperipherie noch genauer. Ludolph von Ceulen fand auf diese Art mit großer Mühe, daß sich der Durchmesser eines Kreises zu seiner Peripherie verhält wie
1:3,14159265358979323846264338327950288....

Zusatz 1. Man nennt die Zahl 3,1415926... ihrem Berechner zu Ehren Ludolph'sche Verhältnißzahl, und bezeichnet sie allgemein mit dem griechischen Buchstaben π.

Zusatz 2. Je nachdem eine Rechnung, in welcher π vorkömmt, mehr oder minder Genauigkeit erfordert, nimmt man auch davon mehr oder weniger Dezimalstellen, und in gewöhnlichen praktischen Fällen reicht 3,14 hin.

Anmerkung. Wir nehmen in diesem Lehrbuch für π gewöhnlich 3,14, in Fällen aber, wo wir etwas genauer rechnen wollen, 3,1416, welches von 3,141592... nur unbedeutend verschieden ist.

§. 115.

Aufgabe. Die Peripherie p eines Kreises aus seinem Durchmesser d oder Halbmesser r (näherungsweise) zu berechnen.

Auflösung. Man multiplicire den Durchmesser oder doppelten Halbmesser mit der ludolph'schen Verhältnißzahl π.

Beweis. Es ist $d:p = 1:3,14159..$ oder

$$d:p = 1:\pi \text{ (§. 114), mithin}$$

$$p = d\pi$$

Da $d = 2r$, so ist p auch $= 2r\pi$.

Beispiel 1. Ein Stein, dessen untere Fläche eben zugerichtet ist, sei 12' lang, und werde (seiner Länge nach) auf Walzen von 6'' Duod. Maß Durchmesser fortbewegt. Nach wie vielen Umdrehungen der Walzen wird der Stein um seine ganze Länge vorgerückt seyn?

Auflösung. Der Umfang einer Walze ist

$$6''.3,14 = 0,5'.3,14 = 1,57'.$$

Bei jeder Umdrehung der Walzen rückt der Stein um 1,57' vor, folglich braucht er, um 12' vorzurücken, $\frac{12}{1,57} = 7,64...$ Umdrehungen derselben.

Beispiel 2. Der Durchmesser des äußern Umfanges bei einem runden Thurme hält 36′ 9″ Duod. Maß; wie groß ist dieser Umfang?

Zusatz. Aus $p = d\pi$ ist $d = \frac{p}{\pi} = p.\frac{1}{\pi} = p.\frac{1}{3{,}14159...}$ $= p.0{,}318309886...$, und $r = \frac{1}{2}d = \frac{1}{2}.\frac{p}{\pi} = \frac{p}{2\pi}$.

Beispiel 1. Es soll ein Getriebe mit 9 Triebstöcken verfertigt werden; wie groß muß man den Halbmesser des Theilungskreises (des Kreises, welcher durch die Mitte der Triebstöcke geht) nehmen, wenn die Theilung oder der Wurf (die Größe des Bogens vom Theilungskreis zwischen den Mitten zweier aufeinander folgenden Triebstöcke) 4″ Duod. Maß betragen soll?

Auflösung. Der Umfang des Theilungskreises beträgt $4''.9 = 36''$; es ist daher der Halbmesser desselben $\frac{36''}{2.3{,}14} = 5{,}73''$ dd $= 5''8'''9''''$ dd.

Beispiel 2. Der äußere Umfang eines runden Thurmes hält 135′, der innere 126′; wie groß ist die Mauerdicke desselben?

§. 116.

Aufgabe. Aus dem Durchmesser oder Halbmesser und der Anzahl der Grade eines Kreisbogens seine Länge zu berechnen.

Auflösung. Bezeichnet d den Durchmesser, r den Halbmesser, n die Anzahl der Grade und a die Länge des Bogens, so ist offenbar

$$360^0 : n^0 = p : a$$

oder weil $p = d\pi$ (§. 115)

$$360 : n = d\pi : a$$

und daraus

$$a = \frac{n}{360}.d\pi$$

oder

$$a = \frac{n}{360}.2r\pi = \frac{n}{180}.r\pi.$$

Zusatz 1. Hält der Bogen außer Graden auch noch Minuten, Sekunden etc., so müssen diese durch Bruchtheile von Graden ausgedrückt werden.

Beispiel 1. Bei einem gothischen Bogen hält ein Bogenstück 58° 30'; wie groß ist seine Länge, wenn der Halbmesser desselben 12' ist?

Auflösung. Es ist hier $r = 12'$ und $n = 58° 30' = 58\frac{1}{2}°$ $= 58,5°$, mithin $a = \frac{58,5}{180} . 12 . 3,14' = 12,246' = 12' 2'' 4'''$ $6''''$ Dez. Maß.

Beispiel 2. Wie groß ist ein Kreisbogen, welcher 32° 46' 25'' hält, wenn sein Durchmesser 11' 8'' Duod. Maß mißt?

Zusatz 2. Sucht man in obiger Proportion den Werth für n, so ergibt sich $n = \frac{360a}{d\pi}$ oder $n = \frac{360a}{2r\pi} = \frac{180a}{r\pi}$, mit welchen Formeln man die Anzahl der Grade findet, die ein Kreisbogen bei der Länge a und dem Durchmesser d oder Halbmesser r hält.

Eben so findet man $r = \frac{180a}{n\pi}$.

Beispiel. Wie viel Grade, Minuten ꝛc. hält ein Kreisbogen, wenn die Länge desselben seinem Halbmesser gleicht?

Auflösung. Da hier $a = r$, so ist $n = \frac{180r}{r\pi}$ oder $n = \frac{180}{\pi} = \frac{180}{3,1416} = 57,2956° = 57° 17' 44''...$

Achter Abschnitt.

Von der Berechnung und den Verhältnissen der ebenen Figuren.

---

§. 117.

Lehrsatz. Wenn die Seite m eines Quadrates q (Fig. 113) in der einen von zwei anliegenden Seiten AD eines Rechteckes AC b mal und in der andern AB a mal enthalten ist, so ist das Quadrat q im Rechteck AC ab mal enthalten, oder es ist $AC = abq$.

Beweis. Wenn die Seite m des Quadrates q in der Seite AD des Rechteckes AC b mal enthalten ist, so läßt sich das Qua-

drat q b mal längs AD nebeneinander legen, wodurch das Rechteck AF=bq entsteht. Ist aber m=AE in der Seite AB a mal enthalten, so läßt sich das Rechteck AF a mal längs AB nebeneinander legen. Es ist daher AC=a AF=a.bq=abq.

§. 118.

Erklärung. Als Flächenmaß dient am natürlichsten unter allen Figuren das Quadrat.

Ein Quadrat, dessen Seite eine Ruthe, einen Fuß, einen Zoll 2c. lang ist, heißt Quadratruthe, Quadratfuß, Quadratzoll 2c.

Zusatz 1. Der Quadratfuß hält im Dezimalmaß 100 Quadratzoll; denn da hier die Seite des Quadratzolles, ein Dezimalzoll, in jeder von zwei anliegenden Seiten des Quadratfußes, 10 mal enthalten ist, so ist der Quadratzoll im Quadratfuß 10.10 = 100 mal enthalten (§. 117).

In gleicher Art hält im Dezimalmaß der Quadratzoll 100 Quadratlinien 2c. und die Quadratruthe 100 Quadratfuß.

Zusatz 2. Im Duodezimalmaß hält der Quadratfuß 144 Quadratzoll; denn es ist hier die Seite des Quadratzolles, ein Duodezimalzoll, in jeder von zwei anliegenden Seiten des Quadratfußes 12 mal; mithin der Quadratzoll im Quadratfuß selbst 12.12=144 mal enthalten (§. 117).

Eben so hält im Duodezimalmaß der Quadratzoll 144 Quadratlinien 2c. und die Quadratruthe 144 Quadratfuß.

Eine Quadratklafter hält 6.6=36 Quadratfuß.

Man bezeichnet Quadratruthen mit $\square^{\circ}$, Quadratfuße mit $\square'$, Quadratzolle mit $\square''$ 2c.

Zusatz 3. Eine Figur messen oder berechnen heißt angeben, wie viel Quadratruthen, Quadratfuße 2c. sie enthält.

§. 119.

Aufgabe. Den Flächeninhalt eines Rechteckes R zu berechnen.

Auflösung. Man messe zwei anliegende Seiten — Grundlinie und Höhe (§. 58. Zus.) — mit dem gebräuchlichen Längenmaß, dem Fuß, und multiplizire die Zahlen, die man dabei erhält;

das Produkt gibt die Anzahl der Quadratfuße an, welche das Rechteck enthält (§. 117 und 118).

Sollten eine oder beide der anliegenden Seiten sich durch Fuß nicht ohne-Rest messen lassen, so nehme man statt eines Fußes einen Zoll, eine Linie ꝛc. und man kann den Flächeninhalt des Rechteckes in Quadratzollen, Quadratlinien ꝛc., überhaupt so genau bestimmen, als man will.

Man drückt sich der Kürze wegen so aus: Der Flächeninhalt eines Rechteckes R ist gleich dem Produkt aus seiner Grundlinie b in seine Höhe h, oder $R = b.h = hb$ (Vergl. §. 92).

Beispiel 1. Der Fußboden eines Saales, welcher 40′ lang und 32′ 6″ Duod. Maß breit ist, soll mit Solnhofer Steinen gepflastert werden; wie hoch kömmt das Pflaster zu stehen, wenn der Quadratfuß mit Arbeitslohn 13 kr. kostet?

Auflösung. $40' = 480''$ und $32'\ 6'' = 390''$; es ist also der Flächeninhalt des Bodens $= 480'' . 390'' = 187200 \square''$ $= 1300 \square'$, und mithin kostet das Pflaster des Saales 13 kr. 1300 = 281 fl. 40 kr.

Anmerkung. Anstatt die gegebenen Längen in Zolle aufzulösen, könnte man beide durch Fuß ausdrücken; es ist nämlich $32'\ 6'' = 32\frac{1}{2}'$, also der Flächeninhalt des Bodens $= 40' . 32\frac{1}{2}'$ $= 1300 \square'$.

Beispiel 2. Wie hoch kömmt das Eindecken eines Pultdaches mit Ziegeln, wenn dasselbe 48′ in der Länge und 27′ in der Schräge hält, und die Quadratklafter 1 fl. 54 kr. kostet?

Zusatz 1. Da das Quadrat ein Rechteck ist, in welchem zwei anliegende Seiten gleich sind, so findet man den Flächeninhalt Q desselben, wenn man eine Seite b mit sich selbst multiplizirt; es ist also $Q = b.b = b^2$.

Man nennt deßwegen auch in der Arithmetik ein Produkt von zwei gleichen Faktoren ein Quadrat.

Beispiel. Jemand kauft einen quadratförmigen Bauplatz, bei welchem eine Seite 45′ 6″ Duod. Maß hält; wie theuer kömmt er ihm zu stehen, wenn der Quadratfuß 12 kr. kostet?

Zusatz 2. Aus $R = bh$ (Aufg.) ist $b = \frac{R}{h}$ und $h = \frac{R}{b}$, und aus $Q = b^2$ (Zus. 1) $b = \sqrt{Q}$.

Beispiel 1. Es soll ein Schulsaal gebaut werden, welcher 124 Kinder faßt; zwischen den Bänken und den vier Wänden soll ringsum ein Gang von 4' Breite, und überdieß noch ein offener Platz von 30□' zu einer Repositur, einem Tisch und Stuhl für den Lehrer bleiben. Auf jedes Kind sollen mit Inbegriff des Antheiles an Bank und Tisch 6□' gerechnet werden. Wie lang muß dieser Saal werden, wenn seine Breite 32' betragen soll?

Auflösung. Der Platz für Lehrer und Schüler muß $30□' + 6□'.124 = 774□'$ halten. Da auf den vier Seiten davon ein Gang von 4' Breite bleiben und der ganze Saal 32' breit seyn soll, so trifft auf den Raum von 774□' die Breite $32' - 4'.2 = 24'$, und folglich eine Länge von $\frac{774'}{24} = 32\frac{1}{4}'$ oder 32' 3'' Duod. Maß. Der Saal selbst muß also, wegen der Breite der Gänge auf beiden Seiten, $32'\ 3'' + 4'.2 = 40'\ 3''$ lang werden.

Probe zur Uebung!

Beispiel 2. Es soll ein Saal gebaut werden, dessen Bodenfläche 1296□' hält; in welchem Fall braucht man zu den Wänden mehr Material, wenn derselbe quadratförmig oder in der Form eines Rechteckes gebaut wird.

Auflösung. Im ersten Falle hält eine Seite des Saales $\sqrt{1296} = 36'$, mithin der Umfang desselben $36'.4 = 144'$. Im zweiten Fall sei die Länge des Saales etwa 48', so beträgt seine Breite $\frac{1296'}{48} = 27'$, und mithin sein Umfang $48'.2 + 27'.2 = 150'$. Da nun der Umfang im erstern Fall kleiner als im zweiten ist, so braucht man dort zu den Wänden weniger Material als hier.

Zusatz 3. Da in einem rechtwinkligen Dreieck ABC (Fig. 110) $AC^2 = AB^2 + BC^2$ ist (§. 111), so ist das Quadrat auf der Hypotenuse eben so groß, als die Quadrate auf den beiden Katheten zusammen (Zus. 1).

Dieser Satz heißt von seinem Erfinder, dem griechischen Philosophen Pythagoras, der Pythagoräische Lehrsatz.

§. 120.

Aufgaben. a) Die Seite eines Quadrates zu finden, welches doppelt so groß ist, als ein gegebenes ABCD (Fig. 66).

Auflösung. Man ziehe eine Diagonale AC, so ist diese die verlangte Seite.

Beweis. Es ist im rechtwinkligen Dreieck ABC $AC^2 = AB^2 + BC^2 = AB^2 + AB^2 = 2AB^2$ (§. 111), mithin das Quadrat auf AC doppelt so groß als ABCD (§. 119. Zus. 1).

b) Die Seite eines Quadrates zu finden, welches der Hälfte eines gegebenen ABCD (Fig. 66) gleich ist.

Auflösung. Man ziehe die beiden Diagonalen AC und BD, so ist AO die verlangte Seite.

Beweis. Es ist $AOD = 90^\circ$ (§. 79. Zus. 4), mithin $AO^2 + DO^2 = AD^2$ (§. 111), oder, weil $AO = DO$ (§. 79. Zus. 6 und 3), $2AO^2 = AD^2$ und $AO^2 = \frac{1}{2} AD^2$; das Quadrat auf AO ist also der Hälfte des Quadrates ABCD gleich (§. 119. Zus. 1).

§. 121.

Aufgabe. Den Flächeninhalt eines schiefwinkligen Parallelogrammes P zu berechnen.

Auflösung. Man messe die Grundlinie b (§. 12) und die Höhe h (§. 58) des Parallelogrammes mit einerlei Längenmaß, und multiplizire die dabei erhaltenen Zahlen; das Produkt gibt den Flächeninhalt im gleichnamigen Flächenmaß, oder es ist $P = bh$.

Beweis. Das Produkt bh gibt den Flächeninhalt eines Rechteckes, welches mit dem Parallelogramme P gleiche Grundlinie und Höhe hat (§. 119). Es ist aber dieses Rechteck dem schiefwinkligen Parallelogramm P an Fläche gleich (§. 59. Zus.), folglich ist auch $P = bh$.

Beispiel 1. Wie groß ist der Flächeninhalt eines Ackers von der Form eines schiefen Parallelogrammes, wenn seine Grundseite $24^\circ\ 2'\ 5''$ und seine Höhe $5^\circ\ 2'$ Dez. Maß hält?

Auflösung. Es ist hier $b = 24^\circ\ 2'\ 5'' = 2425''$ und $h = 5^\circ\ 2' = 520''$, mithin $P = 2425'' . 520'' = 1261000 \square'' = 126 \square^\circ\ 10 \square'$ d.

Beispiel 2. Wie groß ist die Fläche eines Wiesgrundes

von der Form eines Parallelogrammes, wenn die Grundseite desselben 40° 9' und die Höhe 48° 4' Dez. Maß hält?

Zusatz 1. Aus $P = bh$ ist $b = \frac{P}{h}$ und $h = \frac{P}{b}$.

Beispiel 1. Ein Parallelogramm hat einen Flächeninhalt von 59□' 42□'' 10□''' und eine Höhe von 6' 8'' 3''' Dez. Maß; wie groß ist seine Grundseite?

Auflösung. Es ist hier $P = 594210$□''' und $h = 683'''$, mithin $b = \frac{P}{h} = \frac{594210'''}{683} = 870''' = 8'\ 7''$ d.

Beispiel 2. Der Flächeninhalt eines Parallelogrammes beträgt 165□', seine Grundlinie 11' 3'' Duod. Maß; wie groß ist seine Höhe?

Zusatz 2. Zwei Parallelogramme (Rechtecke) verhalten sich wie die Produkte aus ihren Höhen und Grundlinien; denn es seien die Parallelogramme P und p, ihre Grundlinien B und b und ihre Höhen H und h, so ist $P = B.H$ und $p = b.h$ (Aufg. und §. 119), mithin

$$P : p = B.H : b.h.$$

Zusatz 3. Zwei Parallelogramme verhalten sich bei gleichen Grundlinien wie ihre Höhen, und bei gleichen Höhen wie ihre Grundlinien; denn ist in obiger Proportion

$B = b$, so ist $P : p = H : h$, und
ist $H = h$ $\quad P : p = B : h$ (Arithm.).

§. 122.

Aufgabe. Ein Parallelogramm $AD = P$ (Fig. 114) in ein anderes gleich großes $ad = p$ (Fig. 115) zu verwandeln, welches eine gegebene Höhe h und einen Winkel a hat.

Auflösung. Man suche zu h, $CF = H$ und $AE = B$ die vierte Proportionallinie $ae = b$ (§. 96), so ist diese die Grundlinie des verlangten Parallelogrammes p, welches nun leicht aus der bekannten Höhe und Grundlinie und dem Winkel a gezeichnet werden kann. (Vergl. §. 60.)

Beweis. Es ist $P = B.H$ und $p = b.h$ (§. 121); nun ist aber, weil $h : H = B : b$ (Auflös.), $B.H = b.h$, mithin $P = p$.

Zusatz. In zwei gleichen Parallelogrammen stehen die Grundlinien mit den Höhen in verkehrter Proportion (Aufl. d. Aufg. u. Bew.)

§. 123.

Aufgabe. Ein Parallelogramm AC (Fig. 116) nach einem gegebenen Verhältniß m:n:o zu theilen.

Auflösung. Man theile die Grundlinie AD nach dem gegebenen Verhältniß (§. 97), und ziehe durch die Theilpunkte F, H Parallelen zur Nebenseite AB, so ist das Parallelogramm nach dem gegebenen Verhältniß getheilt.

Beweis. Die Parallelogramme AE, FG und HC haben gleiche Höhe (§. 58 und §. 48), folglich ist
$AE:FG:HC = AF:FH:HD = m:n:o$ (§. 121. Zus. 3).

Zusatz. Macht man $AF = FH = HD$ (§. 94), so wird das Parallelogramm AC in 3 gleiche Theile getheilt. (Vergl. §. 59. Zus.)

§. 124.

Aufgabe. Ein jedes Parallelogramm (Rechteck) P in ein gleich großes Quadrat zu verwandeln (zu quadriren).

Auflösung. Man suche zu der Grundlinie b und der Höhe h des Parallelogrammes (Rechteckes) die mittlere geometrische Proportionallinie x (§. 110), so ist diese die Seite des verlangten Quadrates Q.

Beweis. Da $b:x:h$ ist (Auflös.), so ist $bh = x^2$ (Arithm.). Es ist aber $bh = P$ (§. 121 und 119), und $x^2 = Q$ (§. 119. Zus. 1); mithin das Parallelogramm (Rechteck) P dem Quadrate Q gleich.

§. 125.

Aufgabe. Den Flächeninhalt eines Dreieckes zu berechnen.

Auflösung. Man messe die Grundlinie b und die Höhe h des Dreieckes mit einerlei Maß; das halbe Produkt der dabei erhaltenen Zahlen gibt den Flächeninhalt, oder es ist $\Delta = \frac{bh}{2}$.

Beweis. Jedes Dreieck ist der Hälfte eines Parallelogrammes

von gleicher Grundlinie und Höhe gleich; nun ist der Flächeninhalt des letztern bh, mithin die Fläche des Dreieckes $\Delta = \frac{bh}{2}$.

Beispiel 1. Wie groß ist der Flächeninhalt eines Dreieckes, dessen Grundseite 54′ 3″ und dessen Höhe 9′ 8″ Duod. Maß hält?

Auflösung. Es ist hier $b = 54' \ 3'' = 54\frac{1}{4}'$ und $h = 9' \ 8'' = 9\frac{2}{3}'$, mithin $\Delta = (54\frac{1}{4}' . 19\frac{1}{3}') : 2 = 533 \square' \ 66 \square''$ dd.

Beispiel 2. Was kostet ein Grundstück von der Form eines Dreieckes, bei welchem die Grundlinie 4° 4′, die Höhe 2′ 6″ 5‴ Dez. Maß mißt, wenn die Quadratklafter um 2fl. 24kr. gekauft wird?

Zusatz 1. Aus $\Delta = \frac{bh}{2}$ ergibt sich $b = \frac{2\Delta}{h}$ und $h = \frac{2\Delta}{b}$.

Beispiel 1. Wie groß ist die Grundlinie eines Dreieckes, dessen Fläche 18□′ 2□″ 40□‴ Dez. Maß und dessen Höhe 12′ mißt?

Auflösung. Es ist $b = \frac{2\Delta}{h} = \frac{2 . 180240'''}{1200} = 300, 4''' = 3' \ 4'''$ d.

Beispiel 2. Wie groß ist die Höhe eines Dreieckes, welches einen Flächeninhalt von 80□′ und eine Grundlinie von 6′ 8″ Duod. Maß hat?

Zusatz 2. Ist ein Dreieck ABC (Fig. 30) gleichschenklig, so ist sein Inhalt $\Delta = \frac{AC . BD}{2}$. Nun ist aber $BD^2 = AB^2 - AD^2 = AB^2 - \frac{1}{4} AC^2$ (weil $AD = \frac{1}{2} AC$ (§. 44)) und $BD = \sqrt{(AB^2 - \frac{1}{4} AC^2)}$; daher $\Delta = \frac{AC}{2} \sqrt{(AB^2 - \frac{1}{4} AC^2)}$, oder wenn man die Grundseite AC mit b und einen Schenkel AB mit a bezeichnet, $\Delta = \frac{b}{2} \sqrt{(a^2 - \frac{1}{4} b^2)}$.

Zusatz 3. Ist das Dreieck ABC gleichseitig, so ist $a = b$, und daher $\Delta = \frac{b}{2} \sqrt{(b^2 - \frac{1}{4} b^2)} = \frac{b}{2} \sqrt{\frac{3}{4} b^2} = \frac{b^2}{4} \sqrt{3}$.

Beispiel. Bei einer Raute ist die kürzere Diagonale einer Seite gleich; wie groß ist der Flächeninhalt derselben, wenn die Diagonale 12′ 4″ Dez. Maß mißt?

Auflösung. Da in diesem Fall die Raute aus zwei congruenten gleichseitigen Dreiecken mit einer Seite $= 12,4'$ besteht, so ist ihr Flächeninhalt $= 2 . \frac{(12,4)^2}{4} \sqrt{3} = 133,15616 \square' = 1 \square^{\circ}$ $33 \square' \; 15 \square'' \; 61,6 \square'''$ d.

Zusatz 4. Da $\Delta = \frac{b . h}{2} = (\frac{b}{2}) . h$ oder $= b . (\frac{h}{2})$ (Arithm.) ist, so ist jedes Dreieck seinem Flächeninhalt nach einem Parallelogramme gleich, welches bei gleicher Höhe h nur eine halb so große Grundlinie $\frac{1}{2}b$, oder bei gleicher Grundlinie b nur eine halb so große Höhe $\frac{1}{2}h$ hat, als das Dreieck (§. 121).

Es läßt sich daher auch jedes Dreieck ABC (Fig. 117 und 118) in ein Parallelogramm verwandeln, wenn man diesem entweder die Höhe des Dreieckes zur Höhe und die halbe Grundlinie AD desselben zur Grundlinie (Fig. 117), oder die Grundlinie AC zur Grundlinie und die halbe Höhe DG zur Höhe gibt (Fig. 118).

Zusatz 5. Jede geradlinige Figur läßt sich in ein Dreieck (§. 68), dieses in ein Parallelogramm (Zus. 4), und letzteres in ein Quadrat (§. 124) verwandeln; es kann also jede geradlinige Figur quadrirt werden.

Zusatz 6. Mehrere Dreiecke Δ, Δ', Δ'' von gleicher Höhe sind zusammen einem einzigen Dreieck D gleich, welches mit ihnen gleiche Höhe h und die Summe ihrer Grundseiten b, b', b'' zur eigenen Grundseite B hat; denn es ist $\Delta + \Delta' + \Delta'' = \frac{b . h}{2} + \frac{b' . h}{2}$ $+ \frac{b'' . h}{2} = (b + b' + b'') \frac{h}{2} = B . \frac{h}{2}$ (weil $b + b' + b'' = B$ (Vorausf.)) $= \frac{Bh}{2} = D$.

Zusatz 7. Dreiecke verhalten sich, wie die Produkte aus ihren Grundlinien und Höhen; bei gleichen Grundlinien wie ihre Höhen, und bei gleichen Höhen wie ihre Grundlinien. Denn es ist jedes Dreieck die Hälfte eines Parallelogrammes von gleicher Grundlinie und Höhe (§. 64), und die Hälften verhalten sich wie ihre Ganzen (§. 121. Zus. 2 und 3).

§. 126.

Aufgabe. Ein Dreieck $ACE = D$ (Fig. 114) in ein anderes gleich großes $ace = d$ (Fig. 115) zu verwandeln, welches eine gegebene Höhe h und einen Winkel a hat.

Auflösung. Man suche zu h, $CF = H$ und $AE = B$ die vierte Proportionallinie $ac = b$ (§. 96), so ist diese die Grundlinie des verlangten Dreieckes, welches nun aus der bekannten Grundlinie und Höhe mit dem Winkel a gezeichnet werden kann. (Vergl. §. 65.)

Beweis. Es ist $D = \frac{B.H}{2}$ und $d = \frac{b.h}{2}$ (§. 125); nun ist aber, weil $h:H = B:b$ (Auflös.), $B.H = b.h$ und $\frac{B.H}{2} = \frac{b.h}{2}$, mithin $D = d$.

Zusatz. In zwei gleichen Dreiecken stehen die Grundlinien mit den Höhen in verkehrter Proportion (Aufl. d. Aufg. u. Bew.).

§. 127.

Aufgabe. Ein Dreieck ABC (Fig. 119) nach einem gegebenen Verhältniß $m:n:o$ zu theilen.

Auflösung. Man theile die Grundlinie AC des Dreieckes nach dem gegebenen Verhältniß (§. 97) und ziehe durch die Theilpunkte D, E gerade Linien nach der Spitze B, so ist das Dreieck nach dem gegebenen Verhältniß getheilt.

Beweis. Die Dreiecke ABD, DBE und EBC haben gleiche Höhe, folglich ist

$\triangle ABD : \triangle DBE : \triangle EBC = AD:DE:EC = m:n:o$ (§. 125. Zus. 7).

Zusatz. Macht man $AD = DE = EC$ (§. 94), so wird das Dreieck in drei gleiche Theile getheilt. (Vergl. §. 64. Zus.)

§. 128.

Aufgabe. Den Flächeninhalt eines Trapezes AC (Fig. 120) aus seinen Parallelseiten (Grundseiten) $AD = p$, $BC = p'$ und seiner Höhe $BE = h$ zu berechnen.

Auflösung. Man multiplizire die Summe der Parallelseiten p und p' mit der halben Höhe h; es ist also $\text{Trap.} = (p + p')\frac{h}{2}$.

Beweis. Zieht man die Diagonale BD, so ist Trap. AC $=$ $\triangle ABD + \triangle BDC = \frac{AD.BE}{2} + \frac{BC.DF}{2}$. Nun ist BE$=DF=$h (§. 48), mithin Trap. AC$= \frac{p.h}{2} + \frac{p''.h}{2} = (p + p')\frac{h}{2}$.

Beispiel 1. Bei einem Walmdach sind die beiden längern Seitenflächen Trapeze, deren Parallelseiten der First und die Länge des Daches sind, die beiden kürzern gleichschenklige Dreiecke, welche zu Grundseiten die Breite des Daches haben. Wie hoch kömmt nun das Eindecken eines solchen Daches mit Ziegeln, wenn der First 44' mißt, das Dach 60' lang und 40' breit ist, die Höhe der längern Seitenflächen 25' und die der kürzern 17' beträgt, und die Quadratklafter 1 fl. 48 kr. kostet?

Auflösung. Die beiden längern Seitenflächen halten $2.(60' + 44')\frac{25'}{2} = 2600\,\square'$, die beiden kürzern $2.\frac{40'.17'}{2} = 680\,\square'$, mithin die ganze Oberfläche des Daches $3280\,\square'$ oder $91\frac{1}{9}\,\square$ Kl. Es kostet daher das Eindecken desselben $1\frac{4}{5}$ fl. $. 91\frac{1}{9} = 164$ fl.

Beispiel 2. Wie groß ist die Fläche eines Trapezes, wenn eine von den Grundseiten 24' 6'', die andere 18' 9'' und die Höhe 12' 4'' Duod. Maß mißt?

Zusatz. Da Trap. AC (Fig. 75) $= (p + p')\frac{h}{2} = (\frac{p + p'}{2}).h = EF.h$ ist (§. 69), so ist die Fläche eines Trapezes der eines Parallelogrammes gleich, welches das arithmetische Mittel der Parallelseiten p und p' oder die Linie EF zur Grundlinie und die Höhe des Trapezes zur Höhe hat.

§. 129.

Aufgabe. Ein Trapez AC (Fig. 75) in ein Parallelogramm zu verwandeln.

Auflösung. Man ziehe durch die Mitte F einer der nicht parallelen Seiten die Parallele GH, welche AD und BC in ihrer

Verlängerung schneidet, so ist AH das verlangte Parallelogramm; denn es ist $AH = AG.h = EF.h =$ Trap. AC (§. 128. Zus.).

§. 130.

Aufgabe. Ein geradliniges Vieleck ABCDEF (Fig. 35) zu berechnen.

Auflösung. Man theile das Vieleck durch Diagonalen, welche von der nämlichen Ecke aus gezogen werden, in Dreiecke, und berechne jedes einzeln (§. 125); die Summe aller Dreiecke gibt den Flächeninhalt des Vieleckes.

Zusatz. Zur Erleichterung der Berechnung nehme man für die zwei aufeinanderfolgenden Dreiecke ABC und ACD die Diagonale AC, für die Dreiecke ADE und AEF die Diagonale AE als Grundseite an.

Beispiel. Wie groß ist der Flächeninhalt eines Trapezoides ABCD (Fig. 121), wenn die Diagonale $BD = \delta = 24' \; 8''$, dann die Höhe $AE = h$ des Dreieckes ABD $29' \; 6''$ und die Höhe $CF = h'$ des Dreieckes BCD $24' \; 4''$ Dez. Maß hält?

Auflösung. Es ist Trap. $AC = \triangle ABD + \triangle BCD = \frac{\delta . h}{2} + \frac{\delta . h'}{2} = \frac{\delta}{2} (h + h') = \frac{24,8'}{2} (29,6' + 24,4') = 12,4' . 54' = 669,6 \square' = 6 \square^{o} \; 69 \square' \; 60 \square''$ d.

§. 131.

Aufgabe. Den Flächeninhalt eines regelmäßigen Vieleckes (Fig. 86) von n Seiten aus einer Seite c und dem Apothema a zu berechnen.

Auflösung. Man multiplizire den Umfang cn mit dem Apothema a, und halbire das Produkt; es ist also Polyg. $= \frac{cna}{2}$.

Beweis. Zieht man vom Mittelpunkt O des regulären Vieleckes nach allen Ecken gerade Linien, so wird dieses in n congruente Dreiecke von der Grundseite c und der Höhe a getheilt (§. 79. Zus. 2), deren jedes $= \frac{ca}{2}$ ist (§. 125). Es ist daher Polyg. $= n . \frac{ca}{2} = \frac{cn . a}{2} = \frac{cna}{2}$.

Anmerkung. Das Apothema kann man in den regulären Vielecken, welche durch geometrische Construktion gezeichnet werden können (§. 83 und 85), auch durch Rechnung finden (§. 112).

Beispiel 1. Der Fußboden eines Salettes hat die Form eines regulären Sechseckes; wie groß ist die Fläche desselben, wenn eine Seite 10′ mißt?

Auflösung. Es ist $a = \sqrt{(r^2 - \frac{1}{4}c^2)}$ (§. 112), oder da im regulären Sechseck $r = c$ ist (§. 84), $a = \sqrt{\frac{3}{4}c^2}$, mithin hier $a = \sqrt{\frac{3}{4} . 100} = \sqrt{75} = 8, 660$. Es ist daher Polyg. $= \frac{6 . 10 . 8,660}{2} = 259,80 \square' = 2 \square^{0}\ 59 \square'\ 80 \square''$ d.

Beispiel 2. Bei einer Gartenanlage, welche die Form eines regulären Achteckes hat, hält die größte Diagonale 60′; wie groß ist der Flächeninhalt derselben?

Zusatz. Ein jedes reguläre Vieleck ist einem Dreieck gleich, welches zur Grundlinie den Umfang und zur Höhe das Apothema des Vieleckes hat (§. 125. Zus. 6).

§. 132.

Aufgabe. Ein reguläres Vieleck von n Seiten (Fig. 93) in ein Dreieck zu verwandeln.

Auflösung. Man verlängere eine Seite AB des Vieleckes nach einer oder beiden Richtungen, lege auf dem verlängerten AB die Seite AB selbst n mal nebeneinander, und ziehe von den äußersten Abschnittspunkten D und E nach dem Mittelpunkt C gerade Linien, so ist DCE das verlangte Dreieck (§. 131. Zus.).

§. 133.

Aufgabe. Den Flächeninhalt C eines Kreises (näherungsweise) zu berechnen.

Auflösung. Man multiplizire das Quadrat des Halbmessers r mit der ludolph'schen Verhältnißzahl; es ist also $C = r^2\pi$.

Beweis. Jeder Kreis ist als ein reguläres Vieleck von unendlich vielen und unendlich kleinen Seiten (§. 91) einem Dreieck gleich, welches seinen Umfang zur Grundlinie und das Apothema zur Höhe hat (§. 131. Zus.); nun ist aber der Umfang des Kreises

$2r\pi$ (§. 115) und sein Apothema der Halbmesser r (§. 91. Zus.), mithin ist die Fläche des Kreises $C = \frac{2r\pi . r}{2} = r^2 \pi$ (§. 125).

Beispiel 1. Ein kreisrunder Saal hält 36′ im Durchmesser; wie groß ist seine Bodenfläche?

Auflösung. Es ist hier $r = \frac{36'}{2} = 18'$, mithin $C = 18^2 . 3,14$ □′ $= 1017,36$ □′ $= 10$ □° 17 □′ 36 □″ d.

Beispiel 2. Der Boden eines Kirchenrundels soll mit Marmorschiefer gepflastert werden; wie hoch muß das Pflaster veranschlagt werden, wenn für den Quadratfuß 13 kr. angesetzt sind, und das Rundel 40′ im Durchmesser hält?

Zusatz 1. Da $r = \frac{1}{2} d$, und mithin $r^2 = (\frac{1}{2} d)^2 = \frac{1}{4} d^2$ ist, so ist auch $C = \frac{1}{4} d^2 \pi$.

Zusatz 2. Aus $C = r^2 \pi$ folgt $r^2 = \frac{C}{\pi}$, und $r = \sqrt{\frac{C}{\pi}}$, ferner $d = 2\sqrt{\frac{C}{\pi}}$.

Beispiel 1. Der Durchschnitt einer kreisförmigen Röhre hält im Lichten 16 □″ 45 □‴; wie groß ist der Durchmesser?

Auflösung. Es ist $d = 2\sqrt{\frac{1645 □'''}{3,14}} = 2\sqrt{523,88..'''}$ $= 2 . 22,88..''' = 45,76..''' = 4''\ 5'''\ 7''''$ d.

Beispiel 2. Es soll eine Röhre verfertigt werden, deren Durchschnittsfläche im Lichten 20 □″ halten soll; in welchem Fall braucht man dazu mehr Material, wenn man dieselbe quadrat- oder kreisförmig macht?

Zusatz 3. Der zwischen zwei concentrischen Kreisen enthaltene Ring (Fig. 17) ist, wenn R den Halbmesser des größern und r den Halbmesser des kleinern Kreises bezeichnet, $= R^2\pi - r^2\pi = (R^2 - r^2)\pi$ $= (R + r)(R - r)\pi$.

Beispiel. Auf einem kreisrunden Platz, welcher 44′ im Durchmesser hält, soll in der Mitte desselben ein Bassin von der nämlichen Form ausgegraben werden, welches 24′ im Durchmesser hat; wie groß ist der Platz, welcher noch übrig bleibt?

Auflösung. Es ist hier $R = \frac{44'}{2} = 22'$ und $r = \frac{24'}{2}$ $= 12'$, mithin die Fläche des Ringes $= (22' + 12')(22' - 12') . 3{,}14$ $= 1097{,}6 \square'$, also nahe $1068 \square'$.

Zusatz 4. Da sich der Umfang eines Kreises nicht vollkommen genau, sondern nur durch Annäherung finden läßt (§. 115), so kann man auch den Kreis nicht in ein ihm vollkommen gleiches Dreieck (§. 132), und mithin auch in kein solches Quadrat verwandeln (§. 125. Zus. 5). (Quadratur des Zirkels!)

Will man die Seite x eines Quadrates finden, welches einem gegebenen Kreise C näherungsweise gleich ist, so ist, da alsdann $x^2 = C = r^2 \pi$ seyn muß, $x = \sqrt{r^2 \pi} = r\sqrt{\pi} = r . 1{,}77245385...$

§. 134.

Aufgabe. Den Flächeninhalt eines Kreisausschnitts (Sectors) $ACB = S$ (Fig. 94) zu berechnen.

Auflösung. Bezeichnet r den Halbmesser des Kreises und n die Anzahl der Grade, welche der Bogen (Winkel) a des Ausschnittes S hält, so ist

$$360^\circ : n^\circ = C : S \quad (\text{§. 19. Zus. 2})$$

oder

$$360 : n = r^2\pi : S$$

und mithin

$$S = \frac{n}{360} . r^2\pi.$$

Beispiel 1. Der Bogen eines Kreisausschnittes hält 50° 24', der Durchmesser 10'; wie groß ist die Fläche desselben?

Auflösung. Es ist hier $n = 50^\circ\, 24' = 50{,}4^\circ$ und $r = \frac{10'}{2}$ $= 5'$, mithin $S = \frac{50{,}4}{360} . 5^2 . 3{,}14 \square' = 10{,}99 \square' = 11 \square'$ beinahe.

Beispiel 2. Wie groß ist die Fläche eines Ausschnittes, wenn der Winkel desselben 90° 54', und der Halbmesser 24' 8'' Dez. Maß hält?

Zusatz 1. Da $a = \frac{n}{180} . r\pi$ (§. 116), so ist $S = \frac{n}{360} . r^2\pi$ $= \frac{n}{180} . r\pi . \frac{r}{2} = a . \frac{r}{2} = \frac{ar}{2}$ d. h. der Sector ist einem

Dreiecke gleich, welches die Länge a seines Bogens zur Grundlinie und seinen Halbmesser zur Höhe hat.

Zusatz 2. Aus obiger Proportion ist $n = \frac{360 S}{r^2 \pi}$ und $r = \sqrt{\frac{360 S}{n\pi}}$.

Beispiel. 1. Die Fläche eines Ausschnittes beträgt 25 □', der Halbmesser mißt 4' 5" Dez. Maß; wie viel Grade ꝛc. hält der Bogen oder Winkel des Ausschnittes?

Auflösung. Es ist $n = \frac{360 . 25^0}{(4,5)^2 . 3,14} = 141,5428^0 = 141^0\ 32'\ 34''$

Beispiel. 2. Ein Ausschnitt, dessen Centriwinkel 80° 30' mißt, hält 54 □' 80 □" Dez. Maß; wie groß ist der Halbmesser?

Zusatz. 3. Um den Flächeninhalt eines Abschnittes AB (Fig. 94) zu finden, berechne man erst den Ausschnitt ACB, ferner aus dem Halbmesser AC uud der Sehne AB das gleichschenklige Dreieck ABC (§. 125. Zus. 2), und ziehe dann den Inhalt des letztern vom erstern ab.

Beispiel. 1. Wie groß ist das Segment, welches durch die Seite eines regulären Sechseckes = 9' abgeschnitten wird?

Auflösung. Da hier der Halbmesser der Sehne gleich ist (§. 84.), so ist Sect. $= \frac{9^2 . 3,14}{6}$ □' = 42,39 □', ferner △ ABC $= \frac{b^2}{4}\sqrt{3} = \frac{81}{4} . 1,732$ □' = 35,073 □' (§. 125. Zus. 3) folglich Segm. = 42,39 □' − 35,073 □' = 7,317 □' = 7 □' 32 □" d beinahe.

Beispiel. 2. Wie groß ist ein Abschnitt, wenn sein Bogen 24° 36', seine Sehne 8' 5" 2‴ 1⁗ Dez. Maß und der Halbmesser des Kreises 20' hält.

§. 135.

Lehrsatz. Aehnliche Dreiecke abc und ABC (Fig. 108 und 109) verhalten sich ihrem Flächeninhalt nach wie die Quadrate ihrer gleichliegenden Seiten oder Höhen.

Beweis. Es ist $\triangle abc : \triangle ABC = ac.bd : AC.BD$ (§. 125. Zus. 7).
Nun ist aber $bd : BD = ac : AC$ (§. 108)
mithin $\triangle abc.bd : \triangle ABC.BD = ac^2.bd : AC^2.BD$ (Arithm.),
oder $\triangle abc : \triangle ABC = ac^2 : AC^2$
Da aber $ac : AC = bd : BD$
und also $ac^2 : AC^2 = bd^2 : BD^2$ (Arithm.),
so ist auch $\triangle abc : \triangle ABC = bd^2 : BD^2$.

§. 136.

Lehrsatz. Zwei ähnliche geradlinige Vielecke abcdef und ABCDEF (Fig. 104 und 105) verhalten sich ihrem Inhalt nach wie die Quadrate gleichliegender Seiten oder Diagonalen.

Beweis. Man theile die Vielecke durch gleichliegende Diagonalen in Dreiecke, so ist $\triangle abc \backsim \triangle ABC$, $\triangle acd \backsim \triangle ACD$ 2c. (§. 106. Zus. 2). Es ist daher

$\triangle abc : \triangle ABC = bc^2 : BC^2 = ab^2 : AB^2$ (§. 135)
$\triangle acd : \triangle ACD = cd^2 : CD^2 = bc^2 : BC^2 = ab^2 : AB^2$
$\triangle ade : \triangle ADE = de^2 : DE^2 = cd^2 : CD^2 = bc^2 : BC^2 = ab^2 : AB^2$
$\triangle aef : \triangle AEF = fa^2 : FA^2 = ef^2 : EF^2 = de^2 : DE^2 = cd^2 : CD^2$
$= bc^2 : BC^2 = ab^2 : AB^2$,

folglich $\triangle abc : \triangle ABC = \triangle acd : \triangle ACD = \triangle ade : \triangle ADE = \triangle aef : \triangle AEF$ und $(\triangle abc + \triangle acd + \triangle ade + \triangle aef) : (\triangle ABC + \triangle ACD + \triangle ADE + \triangle AEF) = \triangle abc : \triangle ABC = ab^2 : AB^2 = bc^2 : BC^2 = cd^2 : CD^2$ 2c. oder $abcdef : ABCDEF = ab^2 : AB^2 = bc^2 : BC^2 = cd^2 : CD^2$ 2c.

Da ferner auch $ab : AB = ac : AC = ad : AD$ 2c. ist (§. 106. Zus. 3), so ist auch $abcdef : ABCDEF = ac^2 : AC^2 = ad^2 : AD^2$ 2c.

Beispiel 1. Ein Grundstück hält nach dem Wienermaß 12□° 24□′ Dez. Maß; welches ist seine Größe in bayer'schem Maß, da der Wiener Längenfuß 140,13, der bayer'sche 129,38 Pariserlinien hält?

Auflösung. Da Quadrate ähnliche Figuren sind, so ist

1 Wien. □′ : 1 bayr. □′ $= (140,13)^2 : (129,38)^2$
mithin $(129,38)^2$ Wien. □′ $= (140,13)^2$ bayr. □′;
folglich $(129,38)^2$ W. □′ : 1224 W. □′ $= (140,13)^2$ b. □′ : x

woraus $x = 1435,85 \ldots b. \square'$
oder $x = 14 \square^{0}\ 35 \square'\ 85 \square''$ d.

Beispiel 2. Was betragen 1600 □' preußischen Maßes in bayer'schem, da der preußische Längenfuß 139,13, der bayer'sche 129,38 Pariserlinien hält?

Zusatz 1. Reguläre Figuren von gleichviel Seiten verhalten sich, wie die Quadrate der Halb- oder Durchmesser der um sie beschriebenen Kreise. Denn es ist (Fig. 106 und 107)

$$abcdef : ABCDEF = ab^2 : AB^2 \quad (\S. 99. \text{Zus. 2 und Lehrs.});$$

nun ist aber $ab : AB = r : R = d : D$ (§. 107. Zus. 1),
mithin $abcdef : ABCDEF = r^2 : R^2 = d^2 : D^2$.

Zusatz 2. Kreisflächen verhalten sich wie die Quadrate ihrer Halb- oder Durchmesser (§. 91).

Beispiel 1. Für das Pflastern eines kreisrunden Saales mit Marmorschiefer wurden 141 fl. 18 kr. bezahlt, indem derselbe 30' im Durchmesser hielt; wie hoch kömmt ein solches Pflaster bei einem ähnlichen Saal, bei gleichem Preis für den Quadratfuß, wenn dieser 25' im Durchmesser hält?

Auflösung. Es ist $30^2 : 25^2 = 141, 3 : x$, also
$x = 98$ fl. 7 kr. 2 hl.

Beispiel 2. Ein Rundel faßt ungefähr 830 Menschen, wenn sein Durchmesser 40' hält; wie groß muß der Durchmesser eines andern seyn, wenn es 1000 Menschen fassen soll?

Zusatz 3. Zwei geradlinige Figuren abcdef und ABCDEF (Fig. 35 und 36), welche ähnlich und gleich sind, sind congruent. Denn es ist

$abcdef : ABCDEF = ab^2 : AB^2 = bc^2 : BC^2$ ꝛc. (Lehrs.); ist nun $abcdef = ABCDEF$, so ist auch $ab^2 = AB$, $bc^2 = BC^2$ ꝛc. (Arithm.) und $ab = AB$, $bc = BC$ ꝛc. Es sind also die Seiten der Figuren der Ordnung nach gleich, und da überdieß derselben in beiden gleichviele, und die gleichliegenden Winkel gleich sind (§. 99), so ist $abcdef \cong ABCDEF$ (§. 1).

§. 137.

Aufgabe. Eine geradlinige Figur f oder einen Kreis f m mal zu vergrößern, so daß die vergrößerte Figur der gegebenen ähnlich wird.

Auflösung. Es bezeichne a eine Seite der geradlinigen Figur f oder den Halbmesser des Kreises f. Man suche zu a und ma die mittlere geometrische Proportionallinie A (§. 110), und zeichne auf A, als der mit a gleichliegenden Seite, eine der gegebenen geradlinigen Figur ähnliche F (§. 105 und 106), oder beschreibe mit A einen Kreis F, so ist $F = mf$.

Beweis. Da $a : A : ma$ ist (Auflös.), so ist $A^2 = ma^2$;

nun ist aber $f : F = a^2 : A^2$ (§. 135 u. §. 136 Lehrs. u. Zus. 2)

oder $f : F = a^2 : ma^2 = 1 : m$,

mithin $F = mf$.

Zusatz. Soll eine geradlinige Figur F oder ein Kreis F m mal verkleinert werden, und die verkleinerte Figur der gegebenen ähnlich seyn, so suche man zu einer Seite A oder dem Halbmesser A und $\frac{A}{m}$ die mittlere geometrische Proportionallinie a, und es ist diese die gleichliegende Seite der gesuchten ähnlichen geradlinigen Figur f oder der Halbmesser des gesuchten Kreises. Denn ist

$$A : a : \frac{A}{m}, \text{ so ist } a^2 = \frac{A}{m}, \text{ und da}$$

$$f : F = a^2 : A^2$$

oder $$f : F = \frac{A^2}{m} : A^2 = \frac{1}{m} : 1,$$

$$f = \frac{1}{m} F.$$

§. 138.

Aufgabe. Zwei geradlinige ähnliche Figuren oder Kreise A und B in eine einzige Figur zusammenzusetzen, welche den gegebenen ähnlich ist.

Auflösung. Es seien a und b die gleichliegenden Seiten der geradlinigen Figuren oder die Halbmesser der Kreise. Man zeichne einen rechten Winkel (Fig. 122), mache einen Schenkel desselben $MN = a$ und den andern $NO = b$, und zeichne auf MO als der mit a oder b gleichliegenden Seite eine A oder B ähnliche geradlinige Figur X (§. 105 und 106), oder beschreibe mit a einen Kreis X, so ist X die verlangte Figur.

Beweis. Da $A \backsim B$ (Voraussſ.), so ist

$$A:B = a^2 : b^2 \quad (\text{§. 135 und 136})$$

oder $$A:B = MN^2 : NO^2 \quad (\text{Auflöſ.})$$

und $$(A+B):A = (MN^2 + NO^2):MN^2 \quad (\text{Arithm.}).$$

Da aber auch $X \backsim A$ (Auflöſ.), so ist

$$A:X = MN^2 : MO^2$$

folglich $$(A+B):X = (MN^2 + NO^2):MO^2.$$

Nun ist $MO^2 = MN^2 + NO^2$ (§. 111), mithin auch $X = A + B$ (Arithm.).

Zuſatz 1. Sollen mehrere ähnliche geradlinige Figuren (Kreiſe) A, B, C, D in eine einzige ihnen ähnliche verwandelt werden, so ſuche man zuerſt die gleichliegende Seite (den Halbmeſſer) x (Fig. 122) einer ähnlichen Figur $X = A + B$ (Auf.), dann die gleichliegende Seite (den Halbmeſſer) y einer ähnlichen Figur $Y = X + C$, ferner die gleichliegende Seite (den Halbmeſſer) z einer ähnlichen Figur $Z = Y + D$, ſo iſt Z die verlangte Figur; denn es iſt dann $Z = Y + D = X + C + D = A + B + C + D$.

Zuſatz 2. Soll eine geradlinige Figur (ein Kreis) X um eine ähnliche Figur A kleiner gemacht werden, ſo daß die verkleinerte Figur der gegebenen ähnlich iſt, ſo zeichne man einen rechten Winkel (Fig. 122), mache den einen Schenkel $MN =$ der Seite (dem Halbmeſſer) der Figur A, beſchreibe aus M mit einem Halbmeſſer = der mit a gleichliegenden Seite (dem Halbmeſſer) von X einen Kreisbogen, welcher den andern Schenkel des rechten Winkels in O ſchneidet, ſo iſt NO die gleichliegende Seite (der Halbmeſſer) der verlangten ähnlichen Figur B. Denn es iſt $X = A + B$ (Bew. d. Aufg.), mithin $B = X - A$.

§. 139.

Anhang. Zuſammenſtellung der in dieſem Abſchnitt für die Berechnung der ebenen Figuren entwickelten Formeln.

Es iſt Parallelogramm (Rechteck) $= bh$ (§. 119 und 121).

Quadrat	$= b^2$ (§. 119. Zuſ. 1).
Dreieck	$= \frac{bh}{2}$ (§. 125).
Gleichſeitiges Dreieck	$= \frac{1}{4} b^2 \sqrt{3}$ (§. 125. Zuſ. 3).

Trapez $= (p + p') \frac{h}{2}$ (§. 128).

Reguläres Vieleck $= \frac{cna}{2}$ (§. 131).

Kreis $= r^2\pi$ (§. 133).

Kreisausschnitt $= \frac{n}{360} . r^2\pi = \frac{ar}{2}$ (§. 134).

Neunter Abschnitt.

Von der Lage gerader Linien in verschiedenen Ebenen und der Ebenen gegen Ebenen.

---

§. 140.

Grundsatz. Eine gerade Linie AB (Fig. 123) oder eine Ebene ABDE, welche einen Punkt A über und einen Punkt B unter einer Ebene MN oder deren Erweiterung hat, schneidet dieselbe.

Zusatz 1. Eine gerade Linie AB oder AC, welche eine Ebene schneidet, oder sie trifft, ohne in ihr zu liegen, hat mit derselben nur einen Punkt C gemein; denn hätte sie mit derselben auch nur zwei Punkte gemeinschaftlich, so müßte sie in ihr liegen (§. 4. Zus. 1), könnte sie also nicht schneiden (Grunds.).

Man nennt den Punkt C den Durchschnittspunkt oder Standpunkt der Linie AB oder AC.

Zusatz 2. Eine gerade Linie AC, welche eine Ebene nur in einem Punkte C trifft, schneidet verlängert dieselbe (Grunds.).

Zusatz 3. Zwei Ebenen AEF und MN müssen sich, gehörig erweitert, schneiden, wenn sie (anfänglich) auch nur einen einzigen Punkt F gemein haben, falls sie nicht in eine zusammen fallen (Grunds.).

§. 141.

Lehrsatz. Die Lage einer Ebene ist durch drei Punkte A, B und C, welche nicht in gerader Linie liegen, bestimmt.

Beweis. Man denke sich durch zwei dieser Punkte, etwa A und B eine gerade Linie gezogen, so kann diese in unzählig

vielen Ebenen liegen. Dreht man nun eine dieser Ebenen um die Linie, so gibt es nur eine einzige Lage, in welcher jene den dritten Punkt C trifft; es ist daher die Lage der Ebene durch die Lage der geraden Linie und den Punkt C, oder da die gerade Linie durch A und B bestimmt ist (§. 3. Zus. 1), durch drei Punkte A, B und C bestimmt.

Zusatz 1. Durch drei Punkte läßt sich immer eine Ebene legen, aber auch nur eine einzige (Lehrs.).

Zusatz 2. Durch einen geradlinigen Winkel oder zwei Parallellinien läßt sich nur eine einzige Ebene legen (Zus. 1).

Zusatz 3. Vier Punkte liegen nicht immer in einer Ebene, so daß sich also durch vier Punkte nicht immer eine Ebene legen läßt.

Ein Stativ (Tisch, Stuhl) mit drei Füßen steht auch auf einem unebenen Boden fest (da man sich durch die drei Fußpunkte immer eine Ebene gelegt denken kann), während dieß bei einem mit vier Füßen nicht immer der Fall ist (Zus. 1 und 3).

Zusatz 4. Zwei Ebenen, welche sich treffen, ohne zusammenzufallen, können nur eine, und zwar eine gerade Linie miteinander gemein haben; denn hätten sie auch nur drei Punkte gemein, die nicht in gerader Linie lägen, so fielen die Ebenen in eine einzige zusammen gegen die Voraussetzung (Zus. 1).

Zusatz 5. Zwei Ebenen können sich nur in einer einzigen geraden Linie schneiden (Zus. 4).

§. 142.

Erklärung. Eine gerade Linie AB (Fig. 124) nennt man auf einer Ebene MN senkrecht, wenn sie auf allen geraden Linien CE, GH, DF rc., welche durch ihren Standpunkt A in derselben gezogen werden können, senkrecht steht; sonst schief.

§. 143.

Lehrsatz. Eine gerade Linie AB (Fig. 124) steht auf einer Ebene MN senkrecht, wenn sie auf zwei durch ihren Standpunkt A in der Ebene gezogenen geraden Linien CE und DF senkrecht ist.

Beweis. Man ziehe in der Ebene MN durch A noch eine andere beliebige gerade Linie GH, und durch C eine gerade Linie

CI, welche AG und AD schneidet, mache AE = AC, AF = AI und ziehe FE, so ist, da auch FAE = CAI (§. 23. Zus.)

1) △ AEF ≅ △ ACI (§. 25), und folglich FE = CI und AFE = AIC.

Es ist daher FE || CI (§. 46. Zus. 1), und GH muß FE (oder deren Verlängerung) in irgend einem Punkt H schneiden (§. 48. Zus. 5).

Nun ist ferner, da AF = AI, AFE = AIC (Nro. 1) und FAH = IAG,

2) △ AFH ≅ △ AIG (§. 43), und also FH = GI und AH = AG.

Zieht man von B nach C, G, I, F, H und E gerade Linien, so ist, da AF = AI, BAF = BAI = 90° (Voraussf.) und AB = AB,

3) △ ABF ≅ △ ABI, und daher BF = BI.

In gleicher Art ist, da AE = AC, BAE = BAC = 90° (Voraussf.) und AB = AB,

4) △ ABE ≅ △ ABC, und folglich BE = BC.

Da ferner FE = CI (Nro. 1), BF = BI (Nro. 3) und BE = BC (Nro. 4) ist, so ist

5) △ BEF ≅ △ BCI (§. 27), und daher BFE = BIC.

Weil ferner FH = GI (Nro. 2), BF = BI (Nro. 3) und BFE = BIC (Nro. 5), so ist

6) △ BFH ≅ △ BGI und BH = BG.

Da endlich AH = AG (Nro. 2), BH = BG (Nro 6) und AB = AB, so ist

7) △ ABH ≅ △ ABG und BAH = BAG = 90° (§. 7); es steht also AB auf GH senkrecht.

Da sich nun auf dieselbe Art zeigen läßt, daß AB auf jeder andern durch ihren Standpunkt A in der Ebene MN gezogenen geraden Linie senkrecht steht, so steht sie auch auf dieser Ebene selbst senkrecht (§. 142).

§. 144.

Lehrsatz. Wenn in einer Ebene MN (Fig. 125) eine gerade Linie CE gezogen ist, und es steht auf CE im nämlichen Punkt C eine gerade Linie CG in der Ebene MN und eine andere CB außer

MN senkrecht, so steht auch jede von irgend einem Punkt B der Linie CB auf CG gefällte Senkrechte BA auf der Ebene MN senkrecht.

Beweis. Man mache CF=AB, und ziehe AF und BF, so ist, da CF=AB, ACF=BAC=90° (Voraussf.) und AC=AC, △ACF≌△ABC (§. 25) und AF=BC. Weil ferner auch noch AB=CF uud BF=BF ist, so ist △ABF≌△BCF (§. 27), und BAF=BCF=90° (Voraussf.). Da nun auch BAC=90° ist, so steht BA auf der Ebene MN senkrecht (§. 143).

Zusatz 1. Wenn eine gerade Linie BA auf einer Ebene MN senkrecht steht, und man zieht durch ihren Standpunkt A zu irgend einer Linie CE in der Ebene die Senkrechte AC, so steht auch die durch C und einen Punkt von BA gezogene gerade Linie BC senkrecht auf CE. Denn macht man wieder CF=BA und zieht AF und BF, so ist, da auch BAC=ACF=90° (Voraussf. und §. 142) und AC=AC ist, △ABC≌△ACF und BC=AF, und weil auch CF=BA und BF=BF ist, △BCF≌△BAF, folglich BCF=BAF=90° (Voraussf. und §. 142).

Zusatz 2. Wenn BA auf der Ebene MN, und BC auf einer Linie CE in derselben senkrecht ist, so ist auch AC senkrecht auf CE. Denn wäre AC nicht senkrecht auf CE, so könnte man von A auf C eine andere Senkrechte, etwa AF ziehen, und es wäre dann BF senkrecht auf CE (Zus. 1); mithin gäbe es also von einem Punkt B außer einer geraden Linie CE auf dieselbe zwei verschiedene Senkrechte BC und BF, welches unmöglich ist (§. 38. Zus. 2).

§. 145.

Aufgabe. Von einem gegebenen Punkt B außerhalb einer Ebene MN (Fig. 125) auf dieselbe eine Senkrechte zu fällen.

Auflösung. Man ziehe in der Ebene MN eine beliebige gerade Linie CE, fälle auf CE vom Punkt B aus die Senkrechte BC, ziehe dann in der Ebene MN durch C eine Linie CG senkrecht zu CE, und fälle auf CG von B aus die Linie BA senkrecht, so steht diese auf der Ebene MN senkrecht (§. 144).

Zusatz 1. Von einem Punkt B außerhalb einer Ebene MN gibt es auf dieselbe blos eine einzige Senkrechte BA; denn gäbe

es noch eine andere etwa BF, so müßte, wenn man AF zieht, BAF = AFB = 90° seyn (§. 142), welches unmöglich ist (§. 38. Zus. 1).

Zusatz 2. Die Senkrechte BA ist die kürzeste Linie, welche von einem Punkte B außerhalb einer Ebene MN auf dieselbe gezogen werden kann; denn jede andere BF ist die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreieckes ABF (§. 142), und ist daher größer als BA (§. 42. Zus. 2).

Man nennt deßwegen auch die Senkrechte BA die Entfernung des Punktes B von der Ebene MN.

§. 146.

Lehrsatz. Eine gerade Linie DE oder FG (Fig. 126) kann nicht auf zwei sich schneidenden Ebenen MN und ABC zugleich senkrecht stehen, weder in der Durchschnittslinie AB selbst, noch in irgend einem andern Punkt F oder G der Ebenen.

Beweis. Steht DE in der Durchschnittslinie AB senkrecht auf der Ebene MN, so ist, wenn man durch E eine gerade Linie EG in der Ebene MN zieht, DEG = 90° (§. 142). Legt man durch DEG eine Ebene (§. 141. Zus. 1), so schneidet diese die Ebene ABC in einer geraden Linie EF (§. 140. Zus. 3 und §. 141. Zus. 5), und es steht die Linie EF in der Ebene DEG auf EG entweder senkrecht oder schief. Im erstern Fall fällt ED mit EF der Lage nach zusammen (§. 7. Zus. 4), liegt also in der Ebene ABC, und kann folglich gar nicht auf ihr stehen (§. 140. Zus. 1). Im zweiten Fall ist auf einer Seite immer ein Winkel FEG $<$ 90° (§. 7), mithin liegt FE zwischen den Schenkeln EG und ED des rechten Winkels DEG; es ist daher DEF $<$ 90°, folglich steht DE schief auf der Ebene ABC (§. 142).

Steht aber FG auf der Ebene MN senkrecht, so ist, wenn man durch G in der Ebene MN eine gerade Linie GE zieht, EGF = 90° (§. 142). Legt man nun durch EGF eine Ebene, so schneidet diese die Ebene ABC in der geraden Linie EF (§. 141. Zus. 5), und es ist im rechtwinkligen Dreieck EFG EFG $<$ 90° (§. 38. Zus. 1), mithin steht FG schief auf der Ebene ABC (§. 142).

Zusatz. Wenn mehrere gerade Linien CA, DA, EA (Fig. 127)

in einem Punkt A zusammenstossen, und es steht eine andere gerade Linie AB im Punkt A auf jeder derselben senkrecht, so liegen diese Linien in einer und derselben Ebene. Denn es steht dann AB sowohl auf der Ebene CAD als auch auf der Ebene DAE senkrecht (§. 145); fielen nun diese ihrer Lage nach nicht in eine und dieselbe zusammen, so gäbe es eine Senkrechte AB auf zwei sich schneidenden Ebenen in ihrer Durchschnittslinie AD (gegen den Lehrsatz.).

§. 147.

Lehrsatz. Wenn zwei gerade Linien AB und CD (Fig. 128) auf einer Ebene senkrecht stehen, so sind sie parallel.

Beweis. Man ziehe BD, errichte in der Ebene MN auf BD in D die Senkrechte DG = AB und ziehe die geraden Linien BG, AG und AD, so ist ABD = BDC = ABG = CDG = BDG = 90° (Voraussf. und §. 142). Weil ferner AB = DG, ABD = BDG = 90° und BD = BD ist, so ist △ABD ≌ △BDG und AD = BG, dann, weil auch DG = AB und AG = AG, △ADG ≌ △ABG, und mithin ADG = ABG = 90°. Da nun CDG, ADG und BDG rechte Winkel sind, so liegen CD, AD und BD und mithin auch AB in einer und derselben Ebene (§. 146. Zus. und §. 4. Zus. 1), und da überdieß ABD + BDC = 180° ist, so ist AB || CD (§. 46).

Zusatz 1. Wenn eine AB von zwei Parallelen auf einer Ebene MN senkrecht steht, so steht auch die andere CD auf derselben senkrecht. Denn stünde CD auf der Ebene MN nicht senkrecht, so könnte man von irgend einem Punkt C der Linie CD eine Senkrechte Cd auf MN fällen (§. 145), und es wäre dann Cd || AB (Lehrs.); mithin gäbe es durch einen Punkt C zwei verschiedene Parallelen CD und Cd zu AB, welches unmöglich ist (§. 48. Zus. 4).

Zusatz 2. Zwei gerade Linien BD und CF (Fig. 129), welche mit einer dritten AE parallel sind, sind unter sich parallel, wenn sie alle drei auch nicht in einer und derselben Ebene liegen. Denn man errichte in einem Punkt A der Linie AE auf derselben in der Ebene der Parallelen AE und BD die Senkrechte AB und in der Ebene der Parallelen AE und CF die Senkrechte AC, so steht AE

auf der Ebene des Winkels BAC senkrecht (§. 143), mithin stehen auch die mit AE parallelen Linien BD und CF (Vorausſ.) auf dieser Ebene senkrecht (Zus. 1) und es ist also BD || CF (Lehrs.).

Zusatz 3. Wenn die Schenkel zweier Winkel DEF und BAC (Fig. 129) nach einerlei Richtung parallel laufen, so sind die Winkel gleich, wenn sie auch in verschiedenen Ebenen liegen. Denn man mache ED = AB, EF = AC und ziehe BD, AE, CF, BC und DF, so sind, da auch ED || AB und EF || AC (Vorausſ.), BE und CE Parallelogramme (§. 57), mithin ist BD = AE = CF (§. 54. Zus. 1) und BD || AE || CF (Zus. 2), folglich ist auch BF ein Parallelogramm (§. 57) und DF = BC. Da nun DF = BC, DE = AB und EF = AC ist, so ist △DEF ≌ △ABC und DEF = ABC.

§. 148.

Aufgabe. In einem Punkt C einer Ebene MN (Fig. 125) auf derselben eine Senkrechte zu errichten.

Auflösung. Man fälle von einem Punkt B außer der Ebene MN auf dieselbe die Senkrechte BA (§. 145), und ziehe durch C zu BA die Parallele CD, so steht diese auf der Ebene MN senkrecht (§. 147. Zus. 1).

Zusatz. In einem Punkt C einer Ebene MN gibt es auf derselben nur eine einzige Senkrechte CD; denn wäre in C noch eine andere Linie etwa CB auf MN senkrecht, so müßte eine durch DCB gelegte Ebene die Ebene MN in einer geraden Linie CA schneiden (§. 140. Zus. 3 und §. 141. Zus. 5), und sowohl CD, als auch CB auf CA im nämlichen Punkt C senkrecht stehen (§. 142), welches unmöglich ist (§. 7. Zus. 4).

§. 149.

Erklärung. Wenn eine gerade Linie BC (Fig. 125) auf einer Ebene MN schief steht, und man fällt aus irgend einem Punkt B von BC auf MN die Senkrechte BA, verbindet dann die Punkte A und C durch die gerade Linie AC, so heißt der Winkel BCA **der Neigungswinkel der Linie BC gegen die Ebene MN.**

§. 150.

Erklärung. Wenn sich zwei Ebenen MN und BAC (Fig. 130) schneiden, und man errichtet in einem Punkt E ihrer Durchschnittslinie AC auf derselben in beiden Ebenen die Senkrechten EF und ED, so heißt der Winkel DEF der Neigungswinkel der Ebenen MN und BAC.

Zusatz 1. Zur Bestimmung der Größe des Neigungswinkels zweier Ebenen ist es willkührlich, in welchem Punkt ihrer Durchschnittslinie man die Senkrechten errichtet, denn da je zwei derselben parallel sind (§. 46. Zus. 3), so sind alle Neigungswinkel, welche man auf die angegebene Art erhält, gleich (§. 147. Zus. 3).

Zusatz 2. Durch den Neigungswinkel ist die Lage zweier Ebenen gegeneinander bestimmt.

Zusatz 3. Die Durchschnittslinie AC zweier sich schneidenden Ebenen MN und BAC steht auf der Ebene DEF ihres Neigungswinkels senkrecht; denn es ist CED = CEF = 90° (§. 143).

§. 151.

Erklärung. Zwei Ebenen BAC und MN (Fig. 131) heißen aufeinander senkrecht, wenn ihr Neigungswinkel DEF = DEF' ein rechter ist.

§. 152.

Lehrsatz. Wenn eine gerade Linie DE (Fig. 131) auf einer Ebene MN senkrecht steht, so steht auch jede durch DE gelegte Ebene BAC senkrecht auf der Ebene MN.

Beweis. Man errichte im Punkt E der Durchschnittslinie AC auf derselben in der Ebene MN die Senkrechte EF, so ist, weil auch DE auf AC senkrecht steht (Voraussf. und §. 142), DEF der Neigungswinkel der Ebenen. Es ist aber DEF = 90° (§. 142), folglich steht BAC senkrecht auf MN (§. 151).

Zusatz 1. Wenn auf der Durchschnittslinie AC zweier aufeinander senkrechten Ebenen BAC und MN in einer derselben BAC eine Senkrechte ED errichtet wird, so steht diese auch auf der Ebene MN senkrecht. Denn errichtet man in E auf AC in der Ebene MN die Senkrechte EF, so ist DEF der Neigungswinkel

der Ebenen (§. 150) und $=90^\circ$ (Vorauss. und §. 151). Da nun auch $DEC=90^\circ$ ist (Vorauss.), so ist DE senkrecht auf MN (§. 143).

Zusatz 2. Wenn zwei sich schneidende Ebenen BAC und DAC (Fig. 132) auf einer dritten Ebene MN senkrecht stehen, so steht auch die Durchschnittslinie AC derselben im Punkte A sowohl senkrecht auf AB, als auch auf AD, und mithin auf der Ebene MN selbst (§. 143). Denn stünde die Durchschnittslinie AC, welche in den Ebenen BAC und DAC zugleich liegt, nicht senkrecht auf AB und AD, so könnte man in A auf AB in der Ebene BAC etwa AE, und auf AD in der Ebene DAC etwa AF senkrecht errichten; es müßte aber dann sowohl AE, als auch AF senkrecht auf der Ebene MN stehen (Zus. 1), welches unmöglich ist (§. 148. Zus.).

§. 153.

Erklärung. Eine gerade Linie AB (Fig. 133), welche außer einer Ebene RS liegt, und sie nie schneidet, so weit man auch beide verlängern oder erweitern mag, heißt zur Ebene MN parallel.

§. 154.

Erklärung. Zwei Ebenen MN und RS (Fig. 133) heißen parallel, wenn sie sich nie treffen, so weit sie auch erweitert werden mögen.

Zusatz 1. Wenn zwei einander parallele Ebenen MN und RS von einer dritten BAC geschnitten werden, so sind ihre Durchschnittslinien AB und CD parallel; denn sie liegen beide in der Ebene BAC und stossen nie zusammen, da die parallelen Ebenen MN und RS, in welchen sie gleichfalls liegen, nie zusammenstossen.

Zusatz 2. Wenn zwei Ebenen MN und RS parallel sind, und man zieht durch einen Punkt A der einen MN zu irgend einer geraden Linie CD in der andern RS die Parallele AE, so liegt diese ganz in der Ebene MN. Denn legt man durch A, C und D eine Ebene, so schneidet diese die Ebene MN in einer geraden Linie AB, welche zu CD parallel ist (Zus. 1). Es muß daher AE der Lage nach mit AB zusammenfallen, mithin in der Ebene MN liegen, da es durch A zu CD nur eine Parallele gibt (§. 48. Zus. 4).

§. 155.

Lehrsatz. Wenn eine gerade Linie AD (Fig. 134) auf zwei Ebenen MN und RS zugleich senkrecht ist, so sind diese parallel.

Beweis. Wären die Ebenen MN und RS nicht parallel, so müßten sie sich gehörig erweitert einmal schneiden; dann wäre aber eine gerade Linie AC auf zwei sich schneidenden Ebenen senkrecht, welches unmöglich ist (§. 146).

Zusatz. Die Ebenen MN und RS zweier Winkel BAC und GHI (Fig. 134) mit parallelen Schenkeln sind einander parallel. Denn man fälle von A auf die Ebene RS die Senkrechte AD und ziehe in dieser Ebene durch D DE || HG und DF || HI, so ist ADE = ADF = 90° (§. 143) und AB || DE und AC || DF (Voraussf. und §. 147. Zus. 2), mithin auch BAD = CAD = 90° (§. 48. Zus. 3). Es steht also DA auch senkrecht auf MN (§. 143), und folglich ist MN || RS (Lehrs.).

§. 156.

Aufgabe. Durch einen außerhalb einer Ebene RS (Fig. 134) gegebenen Punkt A eine mit dieser parallele Ebene zu legen.

Auflösung. Man fälle von A auf RS die Senkrechte AD, und ziehe durch D in der Ebene RS zwei beliebige gerade Linien DE und DF. Zieht man nun durch A AB || DE und AC || DF, und legt durch den Winkel BAC eine Ebene MN, so ist diese parallel mit RS (§. 155. Zus.).

§. 157.

Lehrsatz. Wenn eine gerade Linie AD (Fig. 134) auf einer von zwei Parallelebenen RS und MN senkrecht steht, so steht sie auch auf der andern senkrecht.

Beweis. Es stehe AD auf der Ebene RS senkrecht. Man ziehe in derselben durch D zwei beliebige gerade Linien DE und DF, so ist ADE = ADF = 90° (§. 142). Legt man durch ADE und ADF Ebenen, so schneiden diese die Ebene MN in den geraden Linien AB und AC. Es ist aber AB || DE und AC || DF (§. 154. Zus. 1), mithin BAD = CAD = 90° (§. 48. Zus. 3), also steht AD auch senkrecht auf MN (§. 143).

Zusatz 1. Wenn zwei Ebenen A und B mit einer dritten C parallel sind, so sind sie auch unter sich parallel; denn errichtet man auf C eine Senkrechte, welche A und B schneidet, so steht sie auch auf diesen senkrecht (Lehrs.), und folglich ist A||B (§. 155).

Zusatz 2. Durch einen Punkt A (Fig. 135) gibt es zu einer Ebene RS nur eine einzige parallele Ebene MN. Denn gäbe es durch A zu RS noch eine andere etwa mn, so müßten sich MN und mn schneiden (§. 140. Zus. 3). Fällt man nun von A auf RS die Senkrechte AD, so müßte diese auch senkrecht auf den sich schneidenden Ebenen MN und mn seyn (Lehrs.), welches unmöglich ist (§. 146).

Zusatz 3. Wenn eine Ebene mn (Fig. 135) die eine MN von zwei parallelen Ebenen schneidet, so schneidet sie auch einmal die andere RS; denn ist MN||RS, so kann mn nicht mit RS parallel seyn (Zus. 2), und muß also dieselbe einmal schneiden.

§. 158.

Lehrsatz. Zwei parallele Ebenen MN und RS (Fig. 133) sind in allen Punkten gleichweit von einander entfernt.

Beweis. Man fälle von zwei beliebigen Punkten A und B der einen Ebene MN auf die andere RS die Senkrechten AC und BD, so sind diese die Entfernungen der Punkte A und B von RS (§. 145. Zus. 2), und es ist AC||BD (§. 147). Es liegen daher AC und BD in derselben Ebene BAC, welche die Ebenen MN und RS in den parallelen Linien AB und CD schneidet (§. 154. Zus. 1), mithin ist ABCD ein Parallelogramm und AC=BD (§. 54. Zus. 1).

Zusatz. Wenn zwei Ebenen, wie MN und RS (Fig. 136) mit einer dritten KL parallel und gleichweit von ihr entfernt sind, so fallen sie in eine einzige zusammen. Denn man ziehe von zwei beliebigen Punkten A und C der Ebenen MN und RS auf die Ebene KL die Senkrechten AB und CD, so sind diese die Entfernungen der Ebenen MN und RS von KL (Lehrs.). Zieht man AC und BD, so ist, da AB=CD (Voraussſ.) und AB||CD (§. 147), AC||BD (§. 57); es liegt daher die Linie AC, weil sie einen Punkt A in der Ebene MN und einen Punkt C in der Ebene RS liegen hat,

und MN || KL und RS || KL (Vorausf.), sowohl in MN als auch in RS (§. 154. Zus. 2). Fielen nun die Ebenen MN und RS nicht in eine zusammen, so müßten sie sich schneiden (§. 140. Zus. 3); dann gäbe es aber durch einen Punkt A oder C zwei verschiedene parallele Ebenen MN und RS zu einer dritten KL, welches unmöglich ist (§. 157. Zus. 2).

§. 159.

Lehrsatz. Eine Ebene OP (Fig. 137), welche zwei parallele Ebenen MN und RS schneidet, bildet mit denselben (nach einer Seite hin) gleiche Neigungswinkel.

Beweis. Die Durchschnittslinien CD und EF sind parallel (§. 154. Zus. 1). Man errichte in einem Punkt G der Durchschnittslinie CD auf derselben in der Ebene OP die Senkrechte AG und in der Ebene MN die Senkrechte GH, so ist AGH der Neigungswinkel der Ebenen OP und MN (§. 150), und DG steht auf der Ebene des Neigungswinkels senkrecht (§. 150. Zus. 3). Erweitert man diese Ebene, so schneidet sie die Ebenen OP und RS in den geraden Linien AB und IK, und es steht, weil CD || EF, auch IF senkrecht auf der Ebene ABL (§. 147. Zus. 1); mithin ist FIG = FIK = 90° (§. 142) und folglich GIK der Neigungswinkel der Ebenen OP und RS. Da aber die Durchschnittslinien GH und IK parallel sind (§. 154. Zus. 1), so ist AGH = GIK (§. 48. Zus. 2).

Zusatz 1. Wenn eine Ebene auf einer von zwei parallelen Ebenen senkrecht steht, so steht sie auch auf der andern senkrecht.

Zusatz 2. Zwei Ebenen MN und RS, welche von einer dritten OP in parallelen Durchschnittslinien CD und EF geschnitten werden, und gegen OP (nach einer Seite hin) gleiche Neigungswinkel bilden, sind parallel. Denn bestimmt man die Neigungswinkel AGH und GIK der Ebenen in gleicher Art, wie im Beweise des Lehrsatzes, so ist AGH = GIK (Vorausf.) und mithin GH || IK (§. 46. Zus. 2); es ist aber auch GD || IF (Vorausf.). Da nun die Schenkel der Winkel DGH und FIK parallel laufen, so sind ihre Ebenen MN und RS selbst parallel (§. 155. Zus.).

Zweite Abtheilung.

Von geometrischen Körpern.

Stereometrie.

Erster Abschnitt.

Von den vorzüglichsten geometrischen Körpern überhaupt.

§. 160.

Erklärung. Wenn mehrere, wenigstens jedoch drei, ihrer Lage nach verschiedene Ebenen in einem Punkt A (Fig. 138) zusammenstossen, so heißt die dadurch gebildete Höhlung ein körperlicher Winkel oder eine körperliche Ecke. Den Punkt A nennt man seine Spitze, die geraden Linien, in welchen die ihn einschließenden Ebenen zusammenstossen, seine Kanten und die von den Kanten gebildeten ebenen Winkel BAC, CAD ꝛc. seine Seiten.

Zusatz. Die Summe aller ebenen Winkel BAC, CAD ꝛc., welche eine körperliche Ecke einschließen, beträgt immer weniger als 360°. Denn hielten diese Winkel zusammen 360°, so lägen sie in einer Ebene (§. 22 Zus. 5); da sie aber eine Höhlung bilden sollen (Erkl.), so muß ihre Summe weniger als 360° halten.*)

§. 161.

Erklärung. Die ganze Grenze, innerhalb welcher ein geometrischer Körper oder ein nach allen Seiten begrenzter Raum (§. 1) eingeschlossen ist, heißt seine Oberfläche. Sie besteht entweder aus lauter Ebenen oder krummen Flächen, oder aus Ebenen und krummen Flächen oder aus einer einzigen krummen Fläche.

Ein nur von Ebenen begrenzter Körper heißt ein eckiger Körper oder Polyeder. Die ihn begrenzenden ebenen Figuren nennt

*) Den streng geometrischen Beweis dieses Zusatzes glaubte der Verfasser übergehen zu dürfen.

man im Allgemeinen Seitenflächen, und die geraden Linien, in welchen sich die Seitenflächen schneiden, Kanten.

Zusatz 1. Die Oberfläche eines eckigen Körpers besteht wenigstens aus vier ebenen Figuren.

Zusatz 2. Zwei eckige Körper sind congruent, wenn sie von gleich vielen einander congruenten und gleich gegeneinander geneigten ebenen Figuren in derselben Ordnung, Folge und gegenseitigen Lage eingeschlossen werden, da Körper von genannter Beschaffenheit offenbar so ineinander gelegt (gedacht) werden können, daß ihre Grenzen überall zusammenfallen (§. 1).

Unterschied zwischen Congruenz und Symmetrie (Aehnlichgleichheit) der Körper mündlich!!

§. 162.

Erklärung. Ein eckiger Körper heißt regulär, wenn er von lauter congruenten regulären Figuren begrenzt ist, und alle seine körperlichen Ecken congruent sind.

§. 163.

Lehrsatz. Es kann nur fünf reguläre Körper geben.

Beweis. Soll eine körperliche Ecke gebildet werden, so sind dazu wenigstens drei ebene Winkel nothwendig (§. 160 Erkl.), und ein von congruenten regulären Figuren begrenzter Körper ist nur dann möglich, wenn die Summe aller zu einer körperlichen Ecke verbundenen Umfangswinkel der regulären Figuren kleiner als 360° ist (§. 160. Zus.)

Es seien nun

1) die regulären Figuren, von welchen der Körper begrenzt ist, Dreiecke, so hält ein Winkel eines jeden derselben 60° (§. 50. Zus. 3.).

a) Die Summe dreier solcher Winkel ist 60°. 3=180°, also kleiner als 360°; folglich läßt sich aus je drei derselben eine körperliche Ecke bilden, und es ist sonach ein regulärer Körper mit solchen körperlichen Ecken möglich. Man hat aber zu seiner Begrenzung nach allen Seiten hin vier congruente reguläre Dreiecke nöthig, und nennt ihn darum auch Tetraeder (Fig. 139.)

b) Die Summe von vier Winkeln regulärer Dreiecke beträgt 60°. 4=240°, also wieder weniger als 360°, folglich lassen sich auch vier Winkel regulärer Dreiecke zu einer körperlichen Ecke zusammensetzen, und ein regulärer Körper mit solchen Ecken ist möglich. Es sind aber zu seiner vollkommenen Begrenzung acht congruente reguläre Dreiecke nöthig, und darum heißt er Octaeder (Fig. 140).

c) Aus je fünf Winkeln regulärer Dreiecke läßt sich ebenfalls noch eine körperliche Ecke bilden, da ihre Summe 60°. 5=300°, also weniger als 360° beträgt. Ein regulärer Körper mit solchen Ecken ist demnach möglich; derselbe hat aber zu seiner Begrenzung zwanzig congruente reguläre Dreiecke nöthig, und heißt daher Ikosaeder (Fig. 141).

d) Da die Summe von sechs Winkeln regulärer Dreiecke schon 60°. 6=360°, und die Summe von noch mehr solchen Winkeln immer größer als 360° ist, so läßt sich aus sechs oder noch mehr Winkeln regulärer Dreiecke keine körperliche Ecke bilden, und es gibt demnach außer den genannten drei keinen regulären Körper mehr, welcher von lauter congruenten regulären Dreiecken begrenzt wäre.

2) Es seien die regulären Figuren, von welchen der reguläre Körper begrenzt ist, Vierecke (Quadrate), so ist jeder Umfangswinkel eines solchen 90° (§. 52. Zus. 2).

a) Die Summe dreier Winkel von Quadraten beträgt 90° × 3=270°, also weniger als 360°; es läßt sich mithin eine körperliche Ecke aus je drei dieser Winkel bilden, und ein Körper mit solchen Ecken ist demnach möglich. Er verlangt aber zu seiner Begrenzung sechs congruente Quadrate, und heißt daher Hexaeder, auch Kubus oder Würfel. (Fig. 142.)

b) Wollte man vier oder noch mehr Winkel von Quadraten zu einer körperlichen Ecke verbinden, so betrüge ihre Summe 90° . 4=360°, oder noch mehr als 360°. Es ist folglich keine körperliche Ecke der Art mehr möglich, und daher gibt es außer dem Hexaeder keinen regulären Körper mehr, welcher von regulären Vierecken begrenzt werden könnte.

3) Wird ein regulärer Körper von lauter regulären Fünfecken begrenzt, so beträgt jeder Umfangswinkel eines solchen 108° (§. 52 Zus. 2).

a) Drei Umfangswinkel regulärer Fünfecke lassen sich zu einer körperlichen Ecke zusammensetzen, da ihre Summe erst 108°.3=324° beträgt. Es ist demnach auch ein regulärer Körper mit solchen Ecken möglich; derselbe braucht zu seiner Begrenzung zwölf congruente reguläre Fünfecke, und wird daher Dodekaeder genannt (Fig. 143).

b) Vier oder noch mehr Winkel regulärer Fünfecke lassen sich nicht zu einer körperlichen Ecke vereinigen, da ihre Summe schon 108°.4=432° oder gar noch mehr beträgt. Es gibt daher außer dem Dodekaeder keinen von lauter regulären Fünfecken begrenzten regulären Körper.

4) Von lauter regulären Sechsecken kann gar kein regulärer Körper eingeschlossen werden, denn es ist ein Umfangswinkel des regulären Sechseckes =120° (§. 52. Zus. 2), und drei derselben betragen schon 120°.3=360°, geben also keine körperliche Ecke mehr. Noch weniger kann ein regulärer Körper von congruenten regulären Figuren mit mehr als sechs Seiten begrenzt werden; da die Umfangswinkel regulärer Vielecke um so größer werden, je größer die Anzahl ihrer Seiten ist (§. 52. Zus. 2).

Es gibt daher nur die fünf angeführten regulären Körper, nämlich das Tetraeder, Octaeder, Ikosaeder, Hexaeder und Dodekaeder.*)

*) Man nennt die fünf regulären Körper auch platonische Körper.

§. 164.

Erklärung. Ein geometrischer Körper (Fig. 144), welcher von zwei congruenten ebenen geradlinigen Figuren ABCD und EFGH, deren Ebenen parallel sind, und eben so vielen Parallelogrammen, als eine jener Figuren Seiten hat, begrenzt ist, heißt ein Prisma.

Jede von den parallelen und congruenten Figuren nennt man eine Grundfläche und die einzelnen Parallelogramme (vorzugsweise) Seitenflächen, die geraden Linien, in welchen sich zwei Seiten-

flächen schneiden, Seiten (Kanten) und eine von einem beliebigen Punkt der einen Grundfläche auf die andere oder deren Erweiterung gefällte Senkrechte, wie IK, die Höhe des Prisma (Vergl. §. 158).

Ein Prisma heißt nach der Anzahl seiner Seiten drei-, vier- oder vielseitig.

Ein Prisma wird endlich noch ein senkrechtes genannt, wenn seine Seitenflächen senkrecht auf den Grundflächen stehen; sonst ein schiefes.

Zusatz 1. Alle Seiten eines Prisma sind untereinander gleich und parallel (§. 54. Zus. 1 und §. 147. Zus. 2.)

Zusatz 2. Bei einem senkrechten Prisma steht jede Seite senkrecht auf den Grundflächen (§. 152. Zus. 2), und ist daher auch zugleich Höhe desselben. Aus demselben Grund sind die Seitenflächen eines senkrechten Prisma Rechtecke.

Zusatz 3. Wenn man durch zwei gleichliegende Diagonalen der congruenten Grundflächen eines Prisma AC und EG, welche in der Ebene der Parallelen AE und CG liegen, eine Ebene legt, so ist die Durchschnittsfigur immer ein Parallelogramm, weil AE || CG (Zus. 1) und EG || AC (§. 154 Zus. 1). Man nennt sie Diagonalebene des Prisma.

Zusatz 4. Wenn ein Prisma parallel zu einer der Grundflächen durchschnitten wird, so ist die Durchschnittsfigur LMNO mit jeder derselben congruent. Denn es ist LM || AB, LO || AD, ON || DC, NM || CB (§. 154. Zus. 1) und BM || AL || DO || CN (Zus. 1); mithin ist LM = AB, LO = AD, ON = DC, NM = CB, dann MLO = BAD, LON = ADC, ONM = DCB und NML = CBA (§. 147. Zus. 3). Da nun die Seiten und Winkel der beiden Figuren der Ordnung nach gleich sind, so sind die Figuren congruent.

§. 165.

Erklärung. Ein Prisma (Fig. 145), welches auch zu seinen Grundflächen Parallelogramme hat, mithin von lauter Parallelogrammen begrenzt ist, heißt ein Paralellepipedon.

Sind bei einem Parallelepidon alle Begrenzungsflächen Rechtecke, so heißt es ein rechtwinkliges (Fig. 146), sind nur vier

davon Rechtecke, ein gerades (Fig. 147) und in jedem andern Falle ein schiefes (Fig. 145).

Häufige Anwendung dieser Körperform, besonders des rechtwinkligen Parallelepipedon bei Mauern, Quadern, Balken, Sparren, Kästen, Zimmern 2c.

Zusatz 1. Der Kubus (Fig. 142) ist ein rechtwinkliges Parallelepipedon; denn es sind die Quadrate AC und EG congruent (§. 163. 2) und parallel, da AB||EF und AD||EH (§. 155. Zus.), und auch die übrigen Seitenflächen Quadrate.

Zusatz 2. Bei einem Parallelepipedon (Fig. 145) sind jede zwei gegenüberstehende Seitenflächen parallel und congruent. Denn es ist, da AE||DH und AB||DC, AF||DG (§. 155. Zus.) und EAB=HDC (§. 147. Zus. 3); ferner, weil auch AE=DH und AB=DC, AF≅DG (§. 54. Zus. 2). Es können deßwegen auch in einem Parallelepipedon jede zwei gegenüberliegende Seitenflächen als Grundflächen angesehen werden (§. 164. Erkl.).

Zusatz 3. Bei einem geraden Parallelepipedon (Fig. 147) stehen die vier Kanten AE, BF 2c. der Rechtecke AH, AF 2c., und folglich die Rechtecke selbst senkrecht auf den schiefen Parallelogrammen AC und EG (§. 152). Denn es ist DAE=BAE=90°; und folglich AE auf den Ebenen AC und EG senkrecht (§. 143 u. §. 157). Eben so stehen die andern Kanten BF, CG und DH auf AC und EG senkrecht, da sie mit AE parallel sind (§. 147. Zus. 1).

Zusatz 4. Im rechtwinkligen Parallelepipedon stehen jede zwei sich schneidende Seitenflächen auf einander senkrecht. (Zus. 3.)

§. 166.

Erklärung. Ein prismatischer Körper (Fig. 148 u. 149), welcher von zwei congruenten und parallelen Kreisen und einer durch die Peripherien derselben gelegten krummen Fläche von der Art begrenzt wird, daß jede gerade Linie, wie DI, welche von einem Punkt I der einen Kreislinie nach der andern mit der Linie CH zwischen den Mittelpunkten der Kreise parallel gezogen wird, ganz in der krummen Fläche liegt, heißt ein Cylinder oder eine Walze.

Jeder von den parallelen Kreisen heißt eine Grundfläche und die krumme Fläche die Seitenfläche des Cylinders. Die

gerade Linie CH, welche zwischen den Mittelpunkten der Grundflächen gezogen ist, nennt man seine Achse, eine in der Seitenfläche zur Achse parallel gezogene gerade Linie eine Seite und eine Senkrechte MN von einer Grundfläche auf die andere oder deren Erweiterung seine Höhe.

Der Cylinder heißt ein senkrechter (Fig. 149), wenn seine Achse senkrecht auf den Grundflächen steht, sonst ein schiefer (Fig. 148).

Häufiger Gebrauch dieser Körperform in allen Zweigen der Technik, bei Gefäßen, Röhren, Gewölben etc. etc.

Zusatz 1. Alle Seiten eines Cylinders sind unter sich parallel; denn sie sind alle seiner Achse parallel (§. 147. Zus. 2). Beim senkrechten Cylinder steht eben deßwegen auch jede Seite senkrecht auf den Grundflächen (§. 147. Zus. 1).

Zusatz 2. Alle Seiten eines Cylinders sind seiner Achse, und mithin auch unter sich gleich. Denn zieht man von den Endpunkten A und F einer beliebigen Seitenlinie AF die Halbmesser AC und FH, so ist, da $AF \parallel CH$ und $AC \parallel FH$ (§. 154. Zus. 1), AH ein Parallelogramm, und mithin $AF = CH$.

Zusatz 3. Da bei einem Cylinder die beiden Grundflächen congruente und parallele reguläre Vielecke von unendlich vielen und unendlich kleinen Seiten (§. 91), auch alle Seiten unter sich parallel und gleich sind (Zus. 1 und 2), mithin in der krummen Seitenfläche rings herum unendlich viele Parallelogramme auf unendlich kleinen Grundseiten bilden (§. 57), so ist der Cylinder als ein unendlichseitiges Prisma zu betrachten (§. 164).

Zusatz 4. Wenn ein Cylinder parallel mit einer Grundfläche durchschnitten wird, so ist die Durchschnittsfigur ein Kreis (Zus. 3 und §. 164. Zus. 4).

§. 167.

Erklärung. Ein geometrischer Körper (Fig. 150), welcher von einer ebenen geradlinigen Figur als Grundfläche und von eben so vielen in einem Punkte zusammenstoßenden Dreiecken, als die Grundfläche Seiten hat, als Seitenflächen begrenzt wird, heißt eine Pyramide.

Der Punkt E, in welchem die Dreiecke zusammenstossen, heißt die Spitze und die von der Spitze auf die Ebene der Grundfläche gefällte Senkrechte EF die Höhe der Pyramide. Die Durchschnittslinien der einzelnen Seitenflächen nennt man Seiten (Kanten).

Eine Pyramide heißt nach der Anzahl der Seiten ihrer Grundfläche drei, vier, ...vielseitig.

Eine Pyramide nennt man endlich noch gleichseitig, wenn alle ihre Seiten gleich sind, sonst ungleichseitig.

Anwendung dieser Körperform bei Denkmälern, besonders im Alterthum, bei Dächern von Thürmen rc.

Zusatz 1. Wenn man in der Grundfläche einer Pyramide eine Diagonale BD zieht, und man legt durch diese und die Spitze E eine Ebene, so ist die Durchschnittsfigur ein Dreieck. Man nennt sie Diagonalebene der Pyramide.

Zusatz 2. Wenn eine Pyramide mit ihrer Grundfläche parallel durchschnitten wird, so ist die Durchschnittsfigur GHIK der Grundfläche ABCD ähnlich. Denn es ist GK || AD, KI || DC, IH || BC und GH || AB (§. 154. Zus. 1), folglich GKI = ADC, KIH = DCB, IHG = CBA und HGK = BAD (§. 147. Zus. 3).

Ferner ist $EK : ED = GK : AD$ (§. 95. Zus. 1)
und eben so $EK : ED = KI : DC$
und folglich $GK : AD = KI : DC$

Eben so läßt sich zeigen, daß auch $KI : DC = IH : CB$ rc. ist; mithin ist $GHIK \sim ABCD$ (§. 99).

Zusatz 3. Wenn eine Pyramide von einer zur Grundfläche parallelen Ebene geschnitten wird, so verhalten sich die beiden Figuren der Durchschnitts- und der Grundfläche, wie die Quadrate ihrer Entfernungen von der Spitze. Denn es ist, da $GHIK \sim ABCD$ (Zus. 1), $GHIK : ABCD = GK^2 : AD^2$ (§. 136).

Fällt man EF senkrecht auf ABCD, so steht sie auch senkrecht auf GHIK (§. 157), und es ist in der Ebene AEF, da GL || AF (§. 154. Zus. 1),

$EG : EA = EL : EF$ (§. 95),
aber auch $EG : EA = GK : AD$
mithin $GK : AD = EL : EF$

und $GK^2 : AD^2 = EL^2 : EF^2$
folglich ist $GHIK : ABCD = EL^2 : EF^2$.

Anwendung dieses Satzes auf die Stärke des Lichts in verschiedenen Entfernungen vom leuchtenden Punkt.

§. 168.

Erklärung. Wenn eine Pyramide (Fig. 150) parallel mit ihrer Grundfläche durchschnitten wird, so heißt der zwischen den beiden Parallelebenen ABCD und GHIK liegende Theil der Pyramide eine abgekürzte oder abgestumpfte Pyramide.

Die beiden parallelen Figuren nennt man ihre Grundflächen und eine Senkrechte zwischen beiden ihre Höhe.

Zusatz 1. Die Grundflächen einer abgekürzten Pyramide sind einander ähnlich (§. 167. Zus. 2), und die Seitenflächen Trapeze (§. 154. Zus. 1).

Zusatz 2. Eine abgekürzte Pyramide kommt einem Prisma von der nämlichen Grundfläche und Höhe um so näher, je kleiner ihre Höhe ist. Denn es ist $GHIK : ABCD = EL^2 : EF^2$ (§. 167. Zus. 3). Je kleiner nun LF wird, desto weniger wird EL von EF verschieden, desto mehr nähert sich also das Verhältniß GHIK : ABCD ($= EL^2 : EF^2$) dem Verhältniß der Gleichheit. Die beiden ähnlichen Grundflächen sind also immer weniger an Größe von einander verschieden, und nähern sich immer mehr ihrer Congruenz (§. 136. Zus. 3), die Seitentrapeze nähern sich immer mehr Parallelogrammen, folglich die abgekürzte Pyramide einem Prisma von der nämlichen Grundfläche und Höhe (§. 164).

Zusatz 3. Eine abgekürzte Pyramide, deren Höhe unendlich klein ist, kann man als ein Prisma von der nämlichen Grundfläche und Höhe betrachten; denn die beiden Grundflächen können in diesem Fall als congruent und die Seitenflächen als Parallelogramme angesehen werden (Zus. 2).

§. 169.

Erklärung. Ein pyramidenförmiger Körper (Fig. 151 u. 152), welcher von einem Kreise und einer krummen Fläche begrenzt wird, die durch den Umfang jenes Kreises geht, und in einem Punkt D

so endet, daß jede gerade Linie, welche von demselben nach einem Punkt der Kreislinie gezogen wird, ganz in der krummen Fläche liegt, heißt ein **Kegel.**

Der Kreis heißt die **Grundfläche**, die krumme Fläche die **Seitenfläche** und der Punkt D, in welchem sie endet, die **Spitze** des Kegels.

Die gerade Linie DC von der Spitze nach dem Mittelpunkt der Grundfläche heißt die **Achse**, eine gerade Linie von der Spitze nach einem Punkt der Peripherie der Grundfläche eine **Seite** und die Senkrechte von der Spitze auf die Ebene der Grundfläche die **Höhe** des Kegels.

Der Kegel heißt **senkrecht** oder **schief**, je nachdem seine Achse senkrecht oder schief auf der Grundfläche steht.

Der Kegel heißt endlich **gleichseitig** (Fig. 152), wenn alle seine Seiten gleich sind, sonst ungleichseitig (Fig. 151).

Zusatz 1. Der senkrechte Kegel (Fig. 152) ist gleichseitig; denn zieht man zwei beliebige Seiten DA und DE und die Halbmesser CA und CE, so ist, da $AC = CE$, $ACD = ECD = 90^0$ (Voraussf. und §. 142) und $CD = CD$, $\triangle ACD \cong \triangle ECD$ und mithin $AD = ED$.

Zusatz 2. Der gleichseitige Kegel ist senkrecht. Denn zieht man zwei Seiten DA und DE, dann die Halbmesser CA und CE, verlängert CA bis B, und zieht die Seite BD, so ist $EC = AC = BC$, $DE = DA = DB$ (Voraussf.) und $CD = CD = CD$, mithin $\triangle ECD \cong \triangle ACD \cong \triangle BCD$, und $ECD = ACD = BCD = 90^0$ (§. 7); es steht also die Achse DC senkrecht auf der Grundlinie (§. 143), und der Kegel ist senkrecht (Erkl.).

Zusatz 3. Da die Grundfläche eines Kegels eine reguläre Figur von unendlich vielen und unendlich kleinen Seiten ist (§. 91), ferner alle Seiten desselben in der Spitze zusammenstoßen, mithin in der krummen Seitenfläche ringsum unendlich viele Dreiecke auf unendlich kleinen Grundseiten bilden, die mit ihren Spitzen in der Spitze des Kegels zusammentreffen, so ist ein Kegel als eine unendlichseitige Pyramide zu betrachten (§. 167).

Zusatz 4. Wenn ein Kegel parallel mit seiner Grundfläche durchschnitten wird, so ist die Durchschnittsfigur ein Kreis (Zus. 3 und §. 167. Zus. 2).

Zusatz 5. Alle mit der Grundfläche eines Kegels parallelen Durchschnittsfiguren verhalten sich, wie die Quadrate ihrer Entfernungen von der Spitze (§. 167. Zus. 3).

§. 170.

Erklärung. Wenn ein Kegel (Fig. 151) parallel zu seiner Grundfläche durchschnitten wird, so heißt der zwischen den parallelen Kreisflächen enthaltene Theil desselben ein abgekürzter oder abgestumpfter Kegel.

Die beiden parallelen Kreise heißen die Grundflächen, und die Entfernung derselben von einander die Höhe des abgekürzten Kegels.

Zusatz 1. Ein abgekürzter Kegel kann als eine abgekürzte Pyramide mit unendlich vielen Seitenflächen betrachtet werden (§. 169. Zus. 3 und §. 168).

Zusatz 2. Ein abgekürzter Kegel von unendlich kleiner Höhe kann als ein Cylinder (Prisma) von der nämlichen Grundfläche und Höhe angesehen werden (Zus. 1 und §. 168. Zus. 3).

§. 171.

Erklärung. Ein geometrischer Körper (Fig. 153), welcher von einer einzigen krummen Fläche begrenzt ist, die in allen Punkten gleichweit von einem innerhalb desselben liegenden Punkt C absteht, heißt eine Kugel (Sphäre).

Der Punkt C heißt der Mittelpunkt, jede gerade Linie, wie CF, welche vom Mittelpunkt nach einem Punkt der Oberfläche gezogen ist, ein Halbmesser (radius), eine gerade Linie FG, welche zwei Punkte der Oberfläche verbindet, eine Sehne, und eine Sehne, welche durch den Mittelpunkt geht, ein Durchmesser (diameter) der Kugel.

Vorkommen dieser Körperform in der Natur und Kunst, bei Weltkörpern, Gewölben ꝛc.

Zusatz 1. Alle Halbmesser und Durchmesser (doppelten Halbmesser), einer Kugel sind gleich.

Zusatz 2. Kugeln von gleichen Halbmessern oder Durchmessern sind congruent, und umgekehrt.

Zusatz 3. Wenn eine Kugel durch eine Ebene geschnitten wird, so ist die Durchschnittsfigur ein Kreis, der seinen Mittelpunkt in dem Durchmesser der Kugel hat, welcher auf der Durchschnittsebene senkrecht steht. Denn es sei FGH die Durchschnittsebene und AB der darauf senkrechte Durchmesser der Kugel. Wählt man nun im Umfange der Durchschnittsfigur zwei beliebige Punkte F und H, und zieht zu ihnen die Kugelhalbmesser CF und CH, dann die geraden Linien EF und EH, so ist, da $CEF = CEH = 90^\circ$ (§. 142), $EF = \sqrt{(CF^2 - CE^2)}$ und $EH = \sqrt{(CH^2 - CE^2)}$ (§. 111 Zus. 1), oder, weil $CF = CH = r$ (Zus. 1), $EF = \sqrt{(r^2 - CE^2)}$ und $EH = \sqrt{(r^2 - CE^2)}$, mithin ist $EF = EH$. Eben so läßt sich zeigen, daß der Umfang der Durchschnittsfigur auch in allen übrigen Punkten gleichweit von dem Punkt E entfernt ist. Es ist folglich dieselbe ein Kreis (§. 13), welcher seinen Mittelpunkt E in dem auf seiner Ebene senkrechten Kugeldurchmesser AB hat.

Man nennt einen solchen Durchschnittskreis einen **Kugelkreis**, den darauf senkrechten Kugeldurchmesser AB, welcher immer durch den Mittelpunkt des Kugelkreises geht, seine **Achse** und die Endpunkte A und B der Achse seine **Pole**.

Zusatz 4. Der Umfang eines Kugelkreises ist in allen Punkten gleichweit von den Polen entfernt; denn zieht man von einem Pole, etwa B, nach zwei beliebigen Punkten F und H jenes Umfanges gerade Linien, so ist, da $EF = EH$, $BE = BE$ und $BEF = BEH = 90^\circ$ (Zus 3 und §. 142), $\triangle BEF \cong \triangle BEH$ und $BF = BH$.

Zusatz 5. Der Ausdruck $EF = \sqrt{(r^2 - CE^2)}$ für den Halbmesser eines Kugelkreises (Zus. 3), wird, da r als Kugelhalbmesser unveränderlich, CE aber veränderlich ist, um so größer, je kleiner CE wird, und folglich am größten, wenn $CE = 0$ wird, d. h. wenn der Kugelkreis durch den Mittelpunkt der Kugel geht. Es wird daher der Kugelkreis selbst in diesem Fall am größten, weßwegen

man auch einen solchen Kreis einen größten Kugelkreis nennt, wie IKL.

§. 172.

Erklärung. Jedes von den beiden Stücken, in welche eine Kugel durch einen Kugelkreis zerlegt wird, heißt ein Kugelabschnitt (Segment), und jener kegelförmiger Theil derselben, dessen Grundfläche die krumme Oberfläche eines Kugelabschnitts, und dessen Spitze der Mittelpunkt der Kugel ist, wie z. B. FBGHC (Fig. 153) ein Kugelausschnitt (Sector).

Verschiedene Kugelkreise, deren Ebenen parallel sind, wie FGH und IKL heißen Parallelkreise, jedes Stück der Kugeloberfläche, welches zwischen zwei Parallelkreisen liegt, eine Zone und ein Stück der Kugel selbst, welches zwischen den Ebenen zweier Parallelkreise liegt, eine körperliche Zone.

Zusatz. Jeder größte Kugelkreis wie IKL theilt die Kugel in zwei congruente Segmente oder Halbkugeln, indem sich das obere Segment in das untere so legen läßt, daß alle ihre Grenzen zusammenfallen (Zus. 1).

Zweiter Abschnitt.

Von der Gleichheit und Congruenz einiger Körper.

---

§. 173.

Lehrsatz. Zwei Parallelepipeda (Fig. 154) auf der nämlichen Grundfläche und von gleicher Höhe sind gleich.

Beweis. Hier sind zwei Fälle zu unterscheiden: es liegen nämlich entweder 1) zwei Paar Seitenflächen von zwei solchen Parallelepipeden ADFG und ADKL in einerlei Ebenen ABKE und DCLH, oder es liegen 2) alle Seitenflächen in verschiedenen Ebenen, wie bei den Parallelepipeden ADFG und ADPR.

Im ersten Fall liegen die obern Grundflächen EG und IL in einer und derselben Ebene EHL, da sie beide mit der Grundfläche AC parallel und gleichweit von ihr entfernt sind (§. 158. Zus.);

daher liegen auch EF und IK in derselben geraden Durchschnittslinie EK, und HG und ML in der geraden Linie HL (§. 141. Zus. 5). Nun ist AH ≅ BG und AM ≅ BL (§. 165. Zus. 2); ferner, weil AE = BF AI = BK und wegen AE || BF, und AI || BK, EAI = FBK ist (§. 48. Zus. 7), △ AEI ≅ △ BFK und EI = FK. Aus ähnlichen Gründen ist auch △ DHM ≅ △ CGL. Da aber EI = FK, dann EH = FG, und wegen EH || FG, HEI = GFK (§. 48. Zus. 2) ist, so ist auch EM ≅ FL (§. 54. Zus. 2). Die Seitenflächen der (prismatischen) Körper AEIDHM u. BFKCGL sind also in derselben Ordnung und Folge congruent, aber auch unter gleichen Neigungswinkeln in derselben Ordnung, Folge und gegenseitigen Lage gegeneinander geneigt, da einmal AEI und BFK, DHM und CGL, EM und FL in einerlei Ebenen liegen, dann AH || BG und AM || BL ist (§. 165. Zus. 2 und §. 159). Es ist daher AEIDHM ≅ BFKCGL (§. 161. Zusatz 2), und da AEKBDHLC = AEKBDHLC, AEKBDHLC — AEIDHM = AEKBDHLC — BFKCGL oder Parallelepipedon ADLK = Parallelepipedon ADFG.

Im zweiten Fall denke man sich ein Parallelepipedon ADLK, welches ein Paar Seitenflächen AK und DL mit einem Paar Seitenflächen AF und DG des Parallelepipedon ADFG und das andere Paar AM und BL mit den Seitenflächen AS und BR des Parallelepipedon ADPR in einerlei Ebenen liegen hat, so ist

Prllpdn. ADGF = Prllpdn. ADLK. }
und Prllpdn. ADPR = Prllpdn. ADLK. } (1ster Fall.)

und mithin Prllpdn. ADGF = Prllpdn. ADPR.

Zusatz 1. Parallelepipeden von congruenten Grundflächen und gleichen Höhen sind gleich; denn denkt man sich dieselben mit ihren Grundflächen aufeinander gestellt, so daß sich diese decken, so stehen sie auf der nämlichen Grundfläche.

Zusatz 2. Ein jedes gerade Parallelepipedon adfg (Fig. 155) ist dem rechtwinkligen ADFG (Fig. 154) von gleicher Grundfläche und Höhe gleich, wenn die Grundflächen ac und AC gleiche Grundlinien, und also auch gleiche Höhen dh und AD haben. Denn sind die Grundlinien ab und AB der Grundflächen ac und AC und die Höhen ae und AE der Parallelepipeden gleich, so ist, da

auch eab = EAB = 90° (§. 165), af ≅ AF (§. 54. Zus. 2). Die Linie dh steht ferner auf der Ebene aefb senkrecht, da aefb auf abcd senkrecht steht (§. 165 Zus. 3), und dh als Höhe der Grundfläche ac auf der Durchschnittslinie ab senkrecht errichtet ist (§. 152. Zus. 1). Betrachtet man nun die congruenten Rechtecke af und AF als Grundflächen der Parallelepipeden adfg und ADFG (§. 165. Zus. 2), so sind dh und AD ihre Höhen, und da diese Linien gleich sind (Vorauss.) so ist Prllpdn. adfg = Prllpdn. ADFG (Zus. 1).

Zusatz. Ein jedes schiefe Parallelepipedon ist dem rechtwinkligen von gleicher Grundfläche und Höhe gleich, dessen Grundfläche mit der seinigen gleiche Grundseite und Höhe hat. Denn es ist ersteres dem geraden, welches mit ihm congruente Grundfläche und gleiche Höhe hat (Zus. 1), und dieses dem rechtwinkligen von gleicher Höhe und Grundfläche gleich, dessen Grundfläche mit der seinigen, und also auch mit der Grundfläche des erstern gleiche Grundseite und Höhe hat (Zus. 2).

§. 174.

Lehrsatz. Wenn man bei einem geraden Parallelepipedon AG (Fig. 147) die schiefen Parallelogramme AC und EG als Grundflächen betrachtet und man legt durch zwei gleichliegende Diagonalen BD und FH derselben eine Diagonalebene, so theilt diese das Parallelepipedon in zwei congruente dreiseitige Prismen.

Beweis. Da AC ≅ EG und AC || EG, so sind die Dreiecke ABD, CB'D', EFH und GF'H' congruent (§. 54 und §. 29. Zus.), und ABD || EFH und CB'D' || GF'H'; ferner sind AH, AF, BH, CF', CH' und B'H' Parallelogramme (§. 164. Zus. 3) folglich ABDEFH und CB'D'GF'H' dreiseitige Prismen (§. 164). Legt man nun das Prisma ABDEFH so in das Prisma CB'D'GF'H', daß ihre congruenten Grundflächen ABD und CB'D' sich decken, also A auf C, B auf D' und D auf B' fällt, so fallen auch die Seiten AE und CG, BF und D'H', DH und B'F' zusammen, da sie auf den Grundflächen senkrecht stehen (§. 165. Zus. 3), und alle gleich groß sind (§. 164. Zus. 1). Es kommt daher auch E auf G, F auf H' und H auf F' zu liegen, und EF und GH', EH und GF', FH und H'F' fallen zusammen. Da nun ein jedes Paar gleich-

liegender Kanten der beiden Prismen in eins zusammen fallen, so fallen auch die Grund- und Seitenflächen zusammen, und es ist sonach Prisma ABDEFH ≌ Prisma CB'D'GF'H' (§. 1).

§. 175.

Lehrsatz. Ein schiefes Parallelepipedon (Fig. 156) wird durch eine Diagonalebene in zwei gleiche dreiseitige Prismen getheilt.

Beweis. Die beiden Körper, in welche das schiefe Parallelepipedon durch die Diagonalebene getheilt wird, sind dreiseitige Prismen, denn sie haben congruente und parallele Dreiecke zu Grundflächen und Parallelogramme zu Seitenflächen. Legt man durch die Punkte D und H zwei auf der Seite DH senkrechte Ebenen, DIKL und HMNO, so erhält man, wenn die Seitenflächen des schiefen Parallelepipedon hinlänglich erweitert werden, das gerade Parallelepipedon DIKLMNOH; denn es sind, weil MO || IL (§. 155), die vier Seitenflächen DO, LN ꝛc. Rechtecke (§. 154. Zus. 1. §. 142 und §. 147. Zus. 1) und die Grundflächen MO und IL parallele und congruente Parallelogramme (§. 147. Zus. 3 und §. 54. Zus. 1). Die Diagonalebene DKNH theilt aber das gerade Parallelepipedon in die zwei congruenten dreiseitigen Prismen DIKHMN und DLKHON (§. 174). Nun ist △ EFH ≌ △ ABD und △ HMN ≌ △ DIK dann, weil EH = AD, HM = DI (§. 54. Zus. 1) und wegen EH || AD und HM || DI, EHM = ADI (§. 147. Zus. 3), △ EHM ≌ △ ADI und EM = AI. Aus ähnlichen Gründen ist auch △ FHN ≌ △ BDK und FN = BK. Ferner ist auch noch Trap. EMNF ≌ Trap. AIKB, da EM = AI, FN = BK, EF = AB und MN = IK, und wegen EF || AB und MN || IK die gleichliegenden Winkel beider gleich sind (§. 48. Zus. 2). Die beiden Pyramiden EMNFH und AIKBD haben daher congruente Grundflächen und in derselben Ordnung und Folge congruente Seitenflächen, welche auch in der nämlichen Ordnung Folge und gegenseitigen Lage gleich gegeneinander geneigt sind, da EHM und ADI, FHN und BDK, EMNF und AIKB in einerlei Ebenen liegen, dann EFH || ABD und HMN || DIK ist (§. 164 und §. 159). Es ist daher Pyr. EMNFH ≌ Pyr. AIKDB (§. 161. Zus. 2).

In gleicher Art läßt sich zeigen, daß Pyr. GONFH $\cong$ Pyr. CLKBD ist. Es ist folglich

Körp. MNHABD + Pyr. EMNFH = Körp. MNHABD + Pyr. AIKBD
u. K. ONHCBD + Pyr. GONFH = Körp. ONHCBD + Pyr. CLKBD
oder Prisma ABDEFH = Prisma DIKHMN
und Prisma BCDFGH = Prisma DLKHON

Nun ist aber Prisma DIKHMN $\cong$ Prisma DLKHON, folglich ist auch Prisma ABDEFH = Prisma BCDFGH.

In manchen Lehrbüchern der Geometrie ist der Satz aufgestellt: „Ein Parallelepipedon (ohne Unterschied) wird durch eine Diagonalebene in zwei congruente dreiseitige Prismen getheilt." Dieß ist bei einem schiefen Parallelepipedon nicht der Fall, indem die beiden dreiseitigen Prismen ABDEFH und BCDFGH auf keine Art zum Decken gebracht werden können, außer es wären die Grundflächen EG und AC des Parallelepipedon Rauten.

Zusatz 1. Ein jedes dreiseitige Prisma ist die Hälfte eines Parallelepipedon von gleicher Höhe, welches auf der zu einem Parallelogramm ergänzten Grundfläche des Prisma steht. (Lehrs. u. §. 173.)

Zusatz 2. Zwei dreiseitige Prismen ABDEFH und abdefh (Fig. 156 und 157) mit congruenten Grundflächen und gleichen Höhen sind gleich. Denn sie sind die Hälften der Parallelepipeden AG und ag von gleicher Höhe, welche auf den zu den Parallelogrammen AC und ac ergänzten Grundflächen der Prismen stehen (Zus. 1). Nun sind aber diese Parallelogramme congruent, da die Grundflächen der Prismen congruent sind (§. 54 Zus. 2), und mithin die Parallelepipeden AG und ag gleich (§. 173 Zus. 1). Es sind daher auch die dreiseitigen Prismen als ihre Hälften gleich.

§. 176.

Lehrsatz. Zwei dreiseitige Pyramiden ABCD und abcd (Fig. 158 und 159) von congruenten Grundflächen und gleichen Höhen sind gleich.

Beweis. Man denke sich die beiden Pyramiden mit ihren (congruenten) Grundflächen auf dieselbe Ebene gestellt, die Höhe DM der einen in unendlich kleine Theile getheilt, und durch alle Theilungspunkte zu der Ebene der Grundflächen Parallelebenen gelegt, so werden beide Pyramiden in gleichviele abgekürzte Pyramiden von

unendlich kleiner Höhe zertheilt, welche als Prismen betrachtet werden können (§. 168. Zus. 3). Vergleicht man nun in den beiden Pyramiden ein Paar solcher Prismen, deren Grundflächen EFG und efg in derselben Ebene liegen, so sind die Entfernungen dieser Grundflächen von den Spitzen DN und dn gleich groß, da DM = dm (Voraussf.), MN = mn (§. 158), und mithin auch DM — MN = dm — mn oder DN = dn ist.

Es ist aber $\triangle$ EFG : $\triangle$ ABC = $DN^2 : DM^2$

und $\triangle$ efg : $\triangle$ abc = $dn^2 : dm^2$ (§. 167. Zus. 3.)

folglich, da DN = dn und DM = dm, sonach auch $DN^2 = dn^2$ und $DM^2 = dm^2$ ist,

$$\triangle EFG : \triangle ABC = \triangle efg : \triangle abc.$$

Da nun $\triangle$ ABC $\cong$ $\triangle$ abc (Voraussf.), so ist $\triangle$ EFG = $\triangle$ efg, und weil $\triangle$ EFG $\sim$ $\triangle$ ABC $\sim$ $\triangle$ abc $\sim$ $\triangle$ efg ist (§. 167. Zus. 2), $\triangle$ EFG $\cong$ $\triangle$ efg (§. 136. Zus. 3).

Es haben also jede zwei mit ihren Grundflächen in einerlei Ebene liegenden dreiseitigen Prismen in den beiden Pyramiden congruente Grundflächen und gleiche (§. 158), nämlich unendlich kleine Höhen, und sind also gleich (§. 175. Zus. 2). Nun bestehen aber die beiden ganzen Pyramiden aus gleichviel solchen paarweise gleichen Prismen; mithin sind die Pyramiden selbst gleich.

§. 177.

Lehrsatz. Eine jede dreiseitige Pyramide ABCD (Fig. 160) ist der dritte Theil eines dreiseitigen Prisma auf der nämlichen Grundfläche und von gleicher Höhe.

Beweis. Man denke sich auf der Grundfläche ABC der dreiseitigen Pyramide das dreiseitige Prisma ABCDEF, welches mit der Pyramide gleiche Höhe und die Seite AD gemein hat. Legt man noch durch D, E und C eine Ebene, so ist das Prisma in die dreiseitigen Pyramiden ABCD, DEFC und DEBC getheilt. Betrachtet man bei den beiden dreiseitigen Pyramiden ABCD und DEFC die congruenten Dreiecke ABC und DEF (§. 164) als Grundflächen, so haben die Pyramiden gleiche Höhen (§. 158); es ist daher Pyr. ABCD = Pyr. DEFC (§. 176). Nimmt man ferner bei den Pyramiden ABCD und DEBC die congruenten Dreiecke ABD

und BDE (§. 54) als Grundflächen an, so ist C die gemeinschaftliche Spitze der Pyramiden, und diese haben gleiche Höhe, da ihre Grundflächen in der nämlichen Ebene liegen (§. 145. Zus. 1), mithin ist auch Pyr. ABCD = Pyr. DEBC. Es ist also Pyr. ABCD = Pyr. DEFC = Pyr. DEBC = $\frac{1}{3}$ ABCDEF, und mithin auch der dritte Theil von jedem andern dreiseitigen Prisma auf der nämlichen Grundfläche und von gleicher Höhe (§. 175. Zus. 2).

Dritter Abschnitt.

Berechnung der Oberflächen der vorzüglichsten geometrischen Körper.

---

§. 178.

Erklärung. Eine Figur, welche alle ebenen und krummen Flächen, die einen geometrischen Körper einschließen, also seine ganze Oberfläche nebst den Kanten derselben in einer Ebene ausgebreitet darstellt, heißt das Netz dieses Körpers.

Die Netze der fünf regulären Körper sind in Fig. 161, 162, 163, 164 und 165 dargestellt.

§. 179.

Aufgabe. Die Oberfläche eines Prisma (Parallelepipedon) zu berechnen.

Auflösung. Man berechne eine Grundfläche, nehme ihren doppelten Werth und addire dazu die Summe aller Seitenflächen.

Zusatz 1. Die Summe aller Seitenflächen eines Prisma erhält man am einfachsten, wenn man durch das Prisma eine Ebene legt, welche auf einer Kante senkrecht steht, und den Umfang der Durchschnittsfigur MHON (Fig. 156) mit einer Seite multiplicirt. Denn es stehen dann alle Seiten senkrecht auf der Durchschnittsebene (§. 147. Zus. 1), und mithin auch auf den Linien MH, HO ꝛc. (§. 142). Betrachtet man nun die unter einander gleichen Kanten AE, DH ꝛc.

(§. 164. Zus. 1) als die Grundlinien der Seitenparallelogramme, so sind MH, HO rc. ihre Höhen, und es ist daher die Summe aller Seitenflächen

$$= AE.MH + DH.HO + CG.ON + BF.NM$$
$$= AE.MH + AE.HO + AE.ON + AE.NM$$
$$= (MH + HO + ON + NM)\ AE.$$

Bezeichnet man daher eine der Grundflächen mit g, eine Seite mit s und den Umfang der Durchschnittsfigur MHON mit p, so ist die Formel für die Berechnung der Gesammtoberfläche S eines jeden Prisma $S = 2g + ps$.

Zusatz 2. Da bei einem senkrechten Prisma schon die Grundflächen auf den Seiten senkrecht stehen (§. 164. Zus. 2), so multiplicirt man hier, um die Summe aller Seitenflächen zu finden, den Umfang der Grundfläche mit einer Seite oder der Höhe des Prisma (Zus. 1).

Netz eines senkrechten Prisma Fig. 166.

Beispiel 1. Wie hoch muß der Verputz von einem Zimmer veranschlagt werden, welches 30' lang, 20' breit und 12' hoch ist, wenn die Quadratklafter auf 54 kr. angesetzt wird?

Auflösung. Die Wände halten (30.2 + 20.2) .12□' = 1200□', die Decke 30.20□' = 600□', mithin Wände und Decke zusammen 1800□' = 50□Klaft., der Verputz kostet also 54 kr..50 = 45 fl.

Beispiel 2. Zum Verputz von Mauern, Wänden und Decken braucht man für 100 Quadratfuß 3 Kubikfuß Tünchspeis; wie viel Tünchspeis hat man zum Verputz bei einem viereckigen Saale nöthig, welcher 48' lang, 36' breit und 24' hoch ist?

§. 180.

Aufgabe. Die Oberfläche eines senkrechten Cylinders zu berechnen.

Auflösung. Wenn man sich die krumme Seitenfläche eines senkrechten Cylinders in einer Ebene ausgebreitet vorstellt, so ergibt sich, daß dadurch ein Rechteck entsteht, dessen Grundlinie dem Umfange der Grundfläche und dessen Höhe der Höhe des Cylinders gleich ist (§. 166. Zus. 3 und §. 164. Zus. 2). Bezeichnet

r den Halbmesser der Grundfläche und h die Höhe des Cylinders, so ist der Umfang der Grundfläche $2r\pi$, und folglich die krumme Seitenfläche F des Cylinders $= 2r\pi . h$ (§. 119).

Addirt man dazu den doppelten Inhalt der Grundfläche, nämlich $2r^2\pi$, so ergibt sich als Formel für die Gesammtoberfläche F' eines senkrechten Cylinders $F' = 2r\pi h + 2r^2\pi = 2r\pi\,(h + r)$.

Beispiel 1. Wie groß ist die innere Oberfläche eines Tonnengewölbes, wenn es 60' lang ist, und der innere Durchmesser 32' hält?

Auflösung. Ein Tonnengewölbe hat die Form von einem halben senkrechten Cylinder; es ist daher die innere Oberfläche desselben $\frac{1}{2} . 2r\pi h = r\pi h = 16 . 3,14 . 60$ □' $= 3014,4$ □'.

Beispiel 2. Wie hoch muß der Verputz eines runden Thurmes (innen und außen) veranschlagt werden, wenn derselbe 60' hoch ist, sein innerer Durchmesser 30' und die Mauerdicke 3' 6'' Duod. Maß hält, und für die Quadratklafter Verputz 1 fl. 36 kr. angesetzt wird?

Beispiel 3. Wie groß ist die Gesammtoberfläche eines senkrechten Cylinders, wenn seine Höhe dem Durchmesser $d = 2r$ seiner Grundfläche gleich ist?

Netz eines senkrechten Cylinders Fig. 167.

Anmerkung. Die Bestimmung der Oberfläche eines schiefen Cylinders gehört der höhern Mathematik an.

§. 181.

Aufgabe. Die Oberfläche einer Pyramide zu berechnen.

Auflösung. Man berechne die Grundfläche und addire dazu die Summe aller Seitenflächen.

Beispiel. Es erfordern 100 Quadratfuß Dachfläche bei doppelter Deckung 400 Stück Ziegel; wie viel Ziegel braucht man demnach bei dem pyramidenförmigen Dache eines viereckigen Thurmes, wenn derselbe 40' lang und eben so breit ist, und das Dach eine Höhe von 56' hat (auf die Ausladung des Daches keine Rücksicht genommen)?

Auflösung. Die Höhe eines von den vier congruenten Dreiecken, aus welchen die Oberfläche des Daches besteht, ist, wie

man mit Hilfe des pythagorischen Lehrsatzes finden kann, 59,4' mithin hält die ganze Oberfläche des Daches $\frac{40 \cdot 59,4}{2}$ □'. 4 $= 4752$ □'. Man braucht also $\frac{400}{100} \cdot 4752 = 19008$ Ziegel.

Netz einer gleichseitigen Pyramide Fig. 168.

§. 182.

Aufgabe. Die Oberfläche eines senkrechten Kegels (Fig. 152) zu berechnen.

Auflösung. Da der senkrechte Kegel gleichseitig ist (§. 169. Zus. 1), mithin alle Punkte des Umfangs seiner Grundfläche gleichweit von seiner Spitze D entfernt sind, so erhellet, daß die krumme Seitenfläche eines senkrechten Kegels, in einer Ebene ausgebreitet, ein Kreisausschnitt ist, dessen Halbmesser einer Seite DA des senkrechten Kegels und dessen Bogen der Peripherie seiner Grundfläche gleich ist. Bezeichnet daher s die Seite und r den Halbmesser der Grundfläche eines senkrechten Kegels, so ist, da man den Flächeninhalt eines Kreisausschnittes erhält, wenn man die Länge seines Bogens mit seinem Halbmesser multiplicirt und das Product halbirt (§. 133. Zus. 1), hier aber die Länge des Bogens die Peripherie der Grundfläche $= 2r\pi$ und der Halbmesser die Seite s des Kegels ist, die krumme Seitenfläche F desselben $= \frac{2r\pi . s}{2} = r\pi s$.

Addirt man dazu die Grundfläche $= r^2\pi$, so ergibt sich als Formel für die Gesammtoberfläche F' eines senkrechten Kegels $F' = r^2\pi + r\pi s = r\pi\,(r + s)$.

Beispiel. Wie groß ist die Oberfläche eines senkrechten Kegels, bei welchem die Seite $s =$ dem Durchmesser $d = 2r$ seiner Grundfläche ist?

Zusatz 1. Ist statt der Seite $DA = s$ die Höhe $CD = h$ des senkrechten Kegels gegeben, so ist, da $AD = \sqrt{(AC^2 + CD^2)}$ oder $s = \sqrt{(r^2 + h^2)}$ (§. 111. Zus. 1), $F = r\pi\sqrt{(r^2 + h^2)}$ und $F' = r\pi\,(r + \sqrt{r^2 + h^2})$.

Beispiel. Wie viel Ziegel braucht man zur Deckung des Daches von einem kreisrunden Thurme, wenn seine Höhe 40', der

Durchmesser des äußern Umfanges desselben 40' hält, und auf 100 Quadratfuß Dachfläche 400 Ziegel gehen (auf die Ausladung des Daches keine Rücksicht genommen)?

Auflösung. Es ist hier $F = r\pi\sqrt{(r^2 + h^2)} = 20.3,14.$ $\sqrt{(20^2 + 40^2)} = 2807,16\square'$. Man braucht also $\frac{400}{100} . 2807$ $= 11228$ Ziegel.

Zusatz 2. Die Anzahl der Grade, welche der Bogen des Netzes von der krummen Seitenfläche eines senkrechten Kegels (des Ausschnittes) hält, findet man also: Es ist $n = \frac{108\,a}{r'\pi}$ (§. 116. Zus. 2); nun ist aber hier $a = 2r\pi$ und $r' = s$, mithin $n = \frac{180 \, . \, 2r\pi}{s\pi}$ $= \frac{360\,r}{s}$.

Beispiel. Wenn man das Netz der krummen Seitenfläche eines senkrechten Kegels verfertigen will, bei welchem die Seite dem Durchmesser der Grundfläche gleich seyn soll, wie viel Grade muß der Bogen des Ausschnittes halten?

Auflösung. Es ist hier $s = 2r$, also $n = \frac{360\,r}{2\,r} = 180^\circ$; d. h. das Netz der krummen Seitenfläche ist in diesem Falle ein Halbkreis.

Vollständiges Netz eines senkrechten Kegels Fig. 169.

Anmerkung. Die Bestimmung der Oberfläche eines schiefen Kegels gehört der höhern Mathematik an.

§. 183.

Aufgabe. Die Oberfläche eines abgekürzten gleichseitigen Kegels (Fig. 152) zu berechnen.

Auflösung. Es sei der Halbmesser der größern Grundfläche $= R$, der Halbmesser der kleinern $= r$ und die Seite des abgekürzten Kegels $AG = s$. Denkt man sich den abgekürzten Kegel zum ganzen Kegel ergänzt, und bezeichnet die Seitenfläche des erstern mit F, die des letztern mit f und die des abgeschnittenen mit f', so ist

$$F = f - f'$$

Es ist aber $f = AC . \pi . DA = R\pi . DA$

und $f' = GI . \pi . DG = r\pi . DG$ (§. 182).

Nun ist im $\triangle$ ADC

$$DG : DA = GI : AC$$ (§. 95. Zus. 1.)

oder $$DA : DG = AC : GI$$

und daher $$\begin{cases} DA - DG : AC - GI = DA : AC \\ DA - DG : AC - GI = DG : GI \end{cases}$$ (Arithm.)

oder weil $DA - DG = AG = s$, $AC = R$ und $GI = r$ ist,

$$\begin{cases} s : R - r = DA : R \text{ und} \\ s : R - r = DG : r \end{cases}$$

Aus diesen beiden Proportionen ist nun

$$DA = \frac{sR}{R-r} \text{ und } DG = \frac{sr}{R-r}; \text{ mithin ist}$$

$$f = R\pi . \frac{sR}{R-r} = \frac{R^2\pi . s}{R-r} \text{ und}$$

$$f' = r\pi . \frac{sr}{R-r} = \frac{r^2\pi . s}{R-r}.$$

Es ist daher

$$F = \frac{R^2\pi . s}{R-r} - \frac{r^2\pi . s}{R-r} = \frac{R^2\pi . s - r^2\pi . s}{R-r}$$

$$= \frac{(R^2 - r^2)\pi s}{R-r}.$$

Es ist aber bekanntlich $R^2 - r^2 = (R+r)(R-r)$,

daher $F = \dfrac{(R+r)(R-r)\pi s}{R-r} = (R+r)\pi s$.

Addirt man dazu die beiden Grundflächen, wovon die eine $= R^2\pi$, die andere $= r^2\pi$ ist, so ergibt sich als Formel für die Berechnung der Gesammtoberfläche $F' =$ eines abgekürzten gleichseitigen Kegels $F' = R^2\pi + r^2\pi + (R+r)\pi s$ oder

$$F' = (R^2 + r^2 + (R+r)s)\pi.$$

Beispiel. Zwölf gleiche Feuereimer sollen außen an der Seitenfläche mit Oelfarbe angestrichen werden, wie hoch kommt das Anstreichen, wenn für den Quadratfuß $1\frac{1}{2}$ kr. verlangt wird, der Eimer unten 3', oben 2' 6'' Duod. M. im Durchmesser hält, und eine Daube 5' lang ist?

Auflösung. Die Seitenfläche eines Eimers ist, da hier $R = \frac{3'}{2} = 1,5'$, $r = \frac{2,5'}{2} = 1,25'$ und $s = 5'$ ist, $= (1,5 + 1,25) . 3,14 . 5 \square' = 43,175 \square'$; es haben daher die zwölf Eimer $43,175 . 12 \square' = 518,1 \square'$ Seitenfläche und das Anstreichen kostet mithin $\frac{1}{2}$ kr. . 518, 1 = 12 fl. 57 kr. 1 hllr.

Zusatz. Will man statt der Seite s die Höhe $CI = GL = h$ des abgekürzten Kegels in die Formel einführen, so ist, da $s = AG$ $= \sqrt{GL^2 + AL^2} = \sqrt{GL^2 + (AC - CL)^2} = \sqrt{GL^2 + (AC - GI)^2}$ $= \sqrt{h^2 + (R - r)^2}$,

$F = (R + r)\pi . \sqrt{h^2 + (R - r)^2}$ und

$F' = (R^2 + r^2 + (R + r)\sqrt{h^2 + (R - r)^2})\pi$.

Netz eines abgekürzten gleichseitigen Kegels Fig. 169.

§. 184.

Aufgabe. Eine Zone, die Oberfläche eines Kugelsegmentes und einer Kugel zu berechnen.

Auflösung. Es sei APQ (Fig. 170) ein Halbkreis und PQ der Durchmesser. Man ziehe eine Sehne AB, halbire sie in E, und fälle von A, E und B auf PQ die Senkrechten AD, EF und BC, so sind diese parallel. Denkt man sich den Halbkreis APQ um PQ als seine Achse gedreht, bis er in seine vorige Lage zurückkommt, so beschreibt er die Oberfläche einer Kugel, der Bogen AB eine Zone, und die Sehne AB die krumme Seitenfläche eines abgekürzten Kegels. Die krumme Seitenfläche des letztern ist $= (AD + BC)\pi . AB$ (§. 183), oder weil im Trapez ABCD $AD + BC = 2 EF$ ist (§. 69), $= 2 EF . \pi . AB$. Fällt man von B und E die Senkrechten BN und EL auf AD und zieht EO, so ist, weil $EL \parallel BN$, $\triangle ABN \sim \triangle AEL$ (§. 100), ferner weil $AEM = 90°$ (§. 35. Zus.), $\triangle AEL \sim \triangle ELM$ (Vergl. Bew. §. 109), dann, weil $EML = DMO$ und $ELM = MDO = 90°$, $\triangle ELM \sim \triangle DMO$ (§. 104) und endlich wegen $AD \parallel EF$, $\triangle DMO \sim \triangle EFO$. Es ist daher auch $\triangle ABN \sim \triangle EFO$ (§. 99. Zus. 1), und folglich

$$AB : BN = EO : EF$$

und daraus $$EF = \frac{EO . BN}{AB}.$$ Mithin ist die Sei-

tenfläche des erwähnten abgekürzten Kegels $= \frac{2\,EO\,.\,BN}{AB} \,.\, \pi \,.\, AB$ $= 2\,EO\,\pi.BN$. Denkt man sich die Sehne AB unendlich klein, so fällt sie mit ihrem Bogen AB zusammen (§. 91); dann wird aber auch die Höhe $BN = CD = a$ des abgekürzten Kegels oder der Zone unendlich klein, die krumme Seitenfläche des Kegels fällt mit der Zone zusammen, EO geht in den Halbmesser des Halbkreises (§. 112. Zus. 2) oder den Halbmesser der Kugel über, und die Zone von unendlich kleiner Höhe ist daher $= 2\,r\pi.a$. Dasselbe gilt auch bei jeder andern Zone von unendlich kleiner Höhe.

1) Denkt man sich nun die Höhe $FG = h$ einer beliebigen Zone ADEB (Fig. 171) in unendlich kleine Theilchen a, a', a'' rc. getheilt, und legt durch jeden Theilpunkt zu dem Kreis AB oder DE Parallelkreise, so wird die Zone ADEB in lauter Zonen z, z', z'' rc. von unendlich kleinen Höhen getheilt, von welchen $z = 2r\pi.a$, $z' = 2r\pi.a'$, $z'' = 2r\pi.a''$ rc. ist. Es ist daher die Zone $ADEB = Z = z + z' + z'' + \ldots = 2r\pi a + 2r\pi a' + 2r\pi a'' + \ldots = 2r\pi\,(a + a' + a'' + \ldots) = 2r\pi h$, da $a + a' + a'' + \ldots = h$ ist. Somit ist jede Zone einem Rechtecke gleich, welches den Umfang $2r\pi$ eines größten Kreises ihrer Kugel zur Grundlinie und ihre Höhe h zur Höhe hat.

2) Da die krumme Oberfläche eines Kugelsegmentes als eine Zone betrachtet werden kann, bei welcher einer der Parallelkreise $= 0$ ist, so gilt die Formel $2r\pi h$ auch für die Berechnung der krummen Fläche eines Kugelsegmentes.

3) Eine Halbkugel ist endlich ein Kugelsegment, dessen Höhe h dem Halbmesser r der Kugel gleich ist; es ist daher die krumme Oberfläche einer Halbkugel $= 2\,r\pi\,.\,r = 2\,r^2\pi$, und folglich die Oberfläche einer ganzen Kugel $= 4\,r^2\pi$, oder da $d = 2r$ und $d^2 = 4r^2$ ist, $= d^2\pi$.

Beispiel 1. Wie groß ist die innere Oberfläche eines offenen Kugelgewölbes (Zone); wenn das Gewölbe 18' hoch ist und der Durchmesser seiner Kugel im Lichten 40' hält?

Auflösung. Der Flächeninhalt einer Zone ist $= 2\,r\pi\,.\,h$, mithin die Oberfläche dieses Gewölbes $= 40\,.\,3,14\,.\,18$ □' $= 2260,80$ □' $= 2261$ □' nahe.

Beispiel 2. Wie groß ist die Oberfläche unserer Erde, da ein Grad des Erdäquators 15 deutsche Meilen hält?

Auflösung. Der größte Kreis der Erdkugel hält 15 M. $\times 360 = 5400$ M., folglich der Durchmesser $\frac{5400}{3,1416}$ M., und die Oberfläche $\left(\frac{5400}{3,1416}\right)^2 . 3,1416 = \frac{5400^2}{3,1416} = 9281896$ deutsche Quadratmeilen.

Beispiel 3. Wie groß ist die innere Oberfläche eines Kugelgewölbes (Halbkugel), wenn sein Durchmesser im Lichten 40' hält?

Zusatz 1. Die Oberfläche einer Kugel ist 4 mal so groß, als ein größter Kugelkreis derselben.

Zusatz 2. Die Oberflächen S und s zweier Kugeln verhalten sich wie die Quadrate ihrer Durchmesser oder Halbmesser; denn sind D und d die Durchmesser und R und r die Halbmesser, so ist $S = D^2\pi$ und $s = d^2\pi$, mithin $S : s = D^2\pi : d^2\pi$ oder

$$S : s = D^2 : d^2 = R^2 : r^2.$$

Zusatz 3. Setzt man (Fig. 171) den Halbmesser DF des Kugelkreises, durch welchen ein Segment von der Kugel abgeschnitten wird $= \rho$ und die Entfernung DH seines Poles H von seinem Umfang $= e$, so ist, wenn man DM zieht, im rechtwinkligen Dreieck DHM (§. 70. Zus. 3) HF:DH:HM (Vergl. Bew. §. 111) oder $h : e : 2r$, mithin $2rh = e^2$. Es ist daher auch die krumme Oberfläche eines Kugelsegmentes $= 2r\pi . h = e^2\pi$, oder da $e^2 = \rho^2 + h^2$ ist, $= (\rho^2 + h^2)\pi$.

Beispiel. Wie groß ist die innere Oberfläche eines runden Schildgewölbes (Kugelsegment,) wenn seine Weite 30' und die Höhe 16' beträgt?

Auflösung. Es ist hier $\rho = \frac{30}{2}' = 15'$ und $h = 16'$, mithin die Oberfläche des Gewölbes $(15^2 + 16^2) . 3,14 \square' = 1510,34 \square'$.

Vierter Abschnitt.

Von der Berechnung und den Verhältnissen der vorzüglichsten Körper.

---

§. 185.

Lehrsatz. Wenn die Seite ab=m (Fig. 172) eines Kubus ag=c in der Länge AB eines rechtwinkligen Parallelepipedon AG=P a mal, in der Breite BC b mal, und in der Höhe AE h mal enthalten ist, so ist der Kubus c im Parallelepipedon P selbst a.b.h mal enthalten, oder es ist P=abhc.

Beweis. Wenn m in AB a mal enthalten ist, so läßt sich der Kubus c längs AB a mal im rechtwinkligen Parallelepipedon AG neben einander legen, da sowohl bei diesem als auch bei jenem die Neigungswinkel der Ebenen rechte sind (§. 165), wodurch das rechtwinklige Parallelepipedon AM=c.a=ac entsteht. Ist ferner m in BC b mal enthalten, so läßt sich das rechtwinklige Parallelepipedon AM auf der Grundfläche AC b mal neben einander legen, wodurch das rechtwinklige Parallelepipedon AN=b Prllpdn. AM entsteht. Ist endlich m in der Höhe AE h mal enthalten, so läßt sich das Parallelepipedon AN h mal übereinander legen, wodurch das Parallelepipedon AG entsteht. Es ist also Prllpdn. AG=h.Prllpdn. AN=h.b. Prllpdn. AM=h.b.a.c=abhc.

§. 186.

Erklärung. Als Maß der Körper dient am natürlichsten unter allen Körpern der Kubus.

Ein Kubus, dessen Seite eine Ruthe, einen Fuß, einen Zoll rc. lang ist, heißt eine Kubikruthe, ein Kubikfuß, ein Kubikzoll rc.

Zusatz 1. Der Kubikfuß hält im Dezimalmaß 1000 Kubikzoll; denn da die Seite des Kubikzolles, ein Dezimalzoll, sowohl in der Länge und Breite, als auch in der Höhe des Kubikfußes 10 mal enthalten ist, so ist der Kubikzoll im Kubikfuß 10.10.10=1000 mal enthalten (§. 185).

Eben so hält im Dezimalmaß der Kubikzoll 1000 Kubiklinien ꝛc. und die Kubikruthe 1000 Kubikfuß.

Zusatz 2. Im Duodezimalmaß hält der Kubikfuß 1728 Kubikzoll; denn es ist hier die Seite des Kubikzolles, ein Duodezimalzoll, sowohl in der Länge und Breite, als auch in der Höhe des Kubikfußes 12 mal, mithin der Kubikzoll selbst im Kubikfuß 12.12.12 = 1728 mal enthalten (§. 185).

In gleicher Art hält im Duodezimalmaß der Kubikzoll 1728 Kubiklinien ꝛc. und die Kubikruthe 1728 Kubikfuß.

Eine Kubikklafter hält 6.6.6=216 Kubikfuß.

Man bezeichnet Kubikruthen mit c^{o}, Kubikfuße mit c', Kubikzolle mit c'' ꝛc.

Zusatz 3. Einen Körper messen oder berechnen heißt angeben, wie viel Kubikruthen, Kubikfuße ꝛc. derselbe enthält.

§. 187.

Aufgabe. Den körperlichen Inhalt eines rechtwinkligen Parallelepipedon zu berechnen.

Auflösung. Man messe die Länge, Breite und Höhe desselben mit einerlei Längenmaß z. B. einem Fuß, so gibt das Product der Zahlen, die man dabei erhält, den Inhalt des rechtwinkligen Parallelepipedon in Kubikfußen an (§. 185 und 186). Sollten sich die genannten Linien des Parallelepipedon nicht mit dem gebrauchten Längenmaße z. B. dem Fuß, messen lassen, so nehme man statt eines Fußes einen Zoll, eine Linie, einen Scrupel ꝛc. überhaupt einen aliquoten Theil von einem Fuß, welcher dieselben so genau mißt, daß ein bleibender Rest als verschwindend betrachtet werden kann, und man erhält durch Multiplication der dabei erhaltenen Zahlen den Kubikinhalt des Parallelepipedon in Kubikzollen, Kubiklinien, Kubikscrupeln ꝛc.

Sind diese Zahlen A, B und H, so ist also der Inhalt des rechtwinkligen Parallelepipedon $P = A.B.H.$

Da nun das Product $A.B$ den Inhalt der Grundfläche G des rechtwinkligen Parallelepipedon bestimmt, so ist $P = G.H$, oder wie man sich der Kürze wegen ausdrückt: Der Inhalt eines

rechtwinkligen Parallelepipedon ist gleich dem Product aus seiner Grundfläche in seine Höhe (Vergl. §. 92).

Beispiel 1. Wie groß ist der Inhalt einer bayerschen Holzklafter, da selbe 6' lang, 6' hoch und die Scheiterlänge gesetzlich 3' 5" Dez. Maß ist?

Auflösung. Es ist hier $P = 60''.60''.35'' = 126000$ c" $= 126$ c'.

Beispiel 2. Es soll ein Kanal von 216 Klaftern Länge, 4' Breite und 3' Tiefe gegraben werden, wobei für die Kubikklafter 1 fl. 24 kr. bezahlt wird. Der ausgegrabene Grund soll weggefahren werden, und man rechnet dabei auf einen Wagen 108 c'; wie viel betragen die Kosten für das Ausgraben; wie viel Fuhren werden es?

Zusatz 1. Da der Kubus ein rechtwinkliges Parallelepipedon ist, in welchem Länge, Breite und Höhe gleich sind, so ist, wenn a eine Seite desselben bezeichnet, sein Inhalt $K = a.a.a = a^3$.

Man nennt deßwegen auch in der Arithmetik ein Product von drei gleichen Factoren einen Kubus.

Beispiel. Was wiegt ein marmorner Würfel, dessen Seite 2' 6" Duod. Maß mißt, da ein bayerscher Kubikfuß Wasser 44, 17 ℔ wiegt, und das spezifische Gewicht des Marmors 2, 7 ist d. h. ein Kubikfuß Marmor 2, 7 mal so viel wiegt, als ein Kubikfuß Wasser?

Zusatz. Aus $P = G.H$ ist $G = \frac{P}{H}$ und $H = \frac{P}{G} = \frac{P}{A.B}$,

und aus $K = a^3$ $a = \sqrt[3]{K}$.

Beispiel 1. Es soll eine Kiste verfertigt werden, welche 10 Scheffel Mehl fassen kann; die Breite soll 3' und die Höhe 4' halten; wie groß muß die Länge seyn, da ein bayerscher Schäffel 8944 bayr. Dezimalkubikzoll faßt?

Auflösung. 10 Schäffel brauchen 89440 c" Raum; nun ist hier $G = 40''.30'' = 1200□''$, mithin die Länge der Kiste

$H = \frac{P}{G} = \frac{89440}{1200}'' = 74, 5..''$ d $= 7'$ 5" 5‴ dd.

Beispiel 2. Man soll einen Würfel mit der Seite a verdoppeln; wie groß muß man die Seite des neuen Würfels nehmen?

Auflösung. Es sei die Seite des neuen Würfels x, so muß $x^3 = 2a^3$ seyn; mithin ist $x = \sqrt[3]{2a^3} = a\sqrt[3]{2} = a.1,2599\ldots = a.1,26$ nahe.

§. 188.

Aufgabe. Den Inhalt eines jeden Parallelepipedon zu berechnen.

Auflösung. Man berechne die Grundfläche G, und multiplizire ihren Inhalt mit der Höhe H des Parallelepipedon.

Beweis. Jedes Parallelepipedon ist dem rechtwinkligen von gleicher Grundfläche und Höhe gleich, wenn dessen Grundfläche mit der seinigen gleiche Grundlinie und Höhe hat (§. 173. Zus. 2 und 3). Es ist aber dieses G.H (§. 187), mithin ist auch $P = G.H$.

Zusatz. Jede zwei Parallelepipeden von gleichen Grundflächen und Höhen sind gleich.

§. 189.

Aufgabe. Den Inhalt eines Prisma zu berechnen.

Auflösung. Man berechne den Inhalt der Grundfläche G und multiplizire denselben mit der Höhe H des Prisma; es ist also $P = G.H$.

Beweis. Ist das Prisma dreiseitig, so ist es die Hälfte eines Parallelepipedon P' von gleicher Höhe, dessen Grundfläche G' die zu einem Parallelogramm ergänzte Grundfläche des Prisma ist (§. 175. Zus. 2) Nun ist aber $P' = G'.H$ (§. 188), folglich $P = \frac{G'.H}{2} = \frac{G'}{2}.H$, oder da $\frac{G'}{2} = G$ ist (§. 64), $P = G.H$.

Ist aber das Prisma mehrseitig (Fig. 173), so lege man durch dasselbe von dem nämlichen Punkt A aus so viel Diagonalebenen, als möglich sind, und es wird das mehrseitige Prisma P in lauter dreiseitige p, p', p'' zerlegt, da $\triangle FGH \cong \triangle ABC$, $\triangle FHI \cong \triangle ACD$, $\triangle FIK \cong \triangle ADE$ ist (§. 29. Zus.), und die Seitenflächen Parallelogramme sind (§. 164). Bezeichnet man die Grundflächen dieser dreiseitigen Prismen, welche mit dem mehrseitigen gleiche Höhe H haben (§. 158), mit g, g', g'', so ist $P = p + p' + p'' = g.H + g'.H + g''.H = (g + g' + g'').H = G.H$, da $g + g' + g'' = G$ ist.

Beispiel 1. Wie groß ist der Kubikinhalt eines ganzen Giebeldaches, wenn das Haus im Lichten 60' lang, 40' breit und das Dach 20' hoch ist?

Auflösung. Die Giebelfläche des Daches, welche hier die Grundfläche des Prisma vorstellt, ist als ein Dreieck $= \frac{40 . 20}{2}$ □' $= 400$ □', mithin ist der Inhalt des Daches $= 400 . 60$ c' $=$ 24000 c' $= 24$ c° d.

Beispiel 2. Wie groß ist der Kubikinhalt eines dreiseitigen prismatischen Steinpfeilers, welcher 18' hoch ist, und bei welchem von zwei Seiten der Grundfläche jede 20' und die dritte Seite 16' mißt?

Zusatz 1. Aus $P = G . H$ ist $G = \frac{P}{H}$ und $H = \frac{P}{G}$.

Beispiel. Ein Oekonom will eine Scheuer bauen lassen, worin er 200 Schock Stroh aufschichten kann, und welche auch eine Dreschtenne von 16' Breite enthält. Da nun die Scheuer mit einem andern Gebäude fortlaufen soll, welches im Lichten 24' tief, bis unters Dach 18' hoch, und dessen Dach 12' hoch ist; wie lange muß diese Scheuer im Lichten werden, wenn auf ein Schock Stroh 340 c' Raum gerechnet werden?

Auflösung. Das Stroh braucht einen Raum von 340 c' $. 200 = 68000$ c'. Da die Tenne 16' breit, 24' tief und 18' hoch ist (der Raum des Daches über der Tenne kann nämlich zum Aufschichten des Strohes benützt werden, da die Scheuer einen Dachboden erhält), so nimmt sie einen Raum von $16 . 24 . 18$ c' $=$ 6912 c' ein; der ganze erforderliche Raum ist demnach 74912 c'.

Der Inhalt der Giebelseite, welche aus einem Rechteck und einem gleichschenkligen Dreieck besteht, (und hier die Grundfläche des Prisma ist), beträgt $24 . 18$ □' $+ \frac{24 . 12}{2}$ □' $= 576$ □'; es ist daher die Länge des Gebäudes (Höhe des Prisma) $= \frac{74912'}{576}$ $= 130, 0 \ldots'$

Zusatz 3. Alle Prismen (Cylinder) verhalten sich wie die Producte aus ihren Grundflächen und Höhen; bei gleichen Grund-

flächen wie ihre Höhen, und bei gleichen Höhen wie ihre Grundflächen. Denn bezeichnen P und p zwei Prismen, G und g ihre Grundflächen und H und h ihre Höhen, so ist, weil $P = G.H$ und $p = g.h$,

$$P:p = G.H:g.h$$

Ist nun $G = g$, so ist

$$P:p = H:h,$$

und ist $H = h$,

$$P:p = G:g.$$

Zusatz 3. Alle Prismen mit gleichen Grundflächen und Höhen sind gleich.

§. 190.

Aufgabe. Den Inhalt eines Cylinders zu berechnen.

Auflösung. Da ein Cylinder als ein Prisma mit unendlich vielen Seiten betrachtet werden kann (§. 166. Zus. 3), so erhält man seinen Kubikinhalt, wenn man den Inhalt seiner Grundfläche mit seiner Höhe multiplicirt (§. 189). Bezeichnet R den Halbmesser und D den Durchmesser der Grundfläche des Cylinders, dann H seine Höhe, so ist sein Inhalt $Cyl. = R^2\pi . H = \frac{1}{4} D^2\pi . H$.

Beispiel 1. Nach Vierenklee berechnet man den Inhalt eines Stammes von der Form eines abgekürzten Kegels, (wenn keine besondere Genauigkeit verlangt wird), indem man dafür den Kubikinhalt eines Cylinders nimmt, welcher den mittleren Kreis zur Grundfläche und zur Höhe die Höhe des Stammes hat, wobei man der Bequemlichkeit wegen, statt der Höhe des abgekürzten Kegels seine Seite nimmt, indem der Unterschied zwischen diesen beiden Längen nicht beträchtlich ist. Wie viel Kubikfuß Holz hält demnach ein Stamm, dessen Durchmesser am Stammende 2', am Zopfe 1' 2'' und dessen Länge 30' Dez. Maß mißt?

Auflösung. Es ist hier $D = \frac{2' + 1,2'}{2} = 1,6'$ und $H = 30'$, mithin ist der Inhalt des Stammes $= \frac{1}{4} . (1,6)^2 . 3,14 . 30\, c' = 60,288\, c'$.

Beispiel 2. Wie viel Kubikfuß hält das Gemäuer eines Brunnen, welcher außen viereckig, innen aber rund ist; wenn eine Seite des Brunnen außen 8', der innere Raum aber 6' im Durchmesser hält und das Gemäuer 40' hoch ist?

Zusatz 1. Aus Cyl. $=$ R$^2\pi$. H ergibt sich $H = \frac{Cyl.}{R^2\pi}$, und $R^2\pi = \frac{Cyl.}{H}$, folglich $R^2 = \frac{Cyl.}{H.\pi}$ und $R = \sqrt{\frac{Cyl.}{H.\pi}}$, mithin $D = 2\sqrt{\frac{Cyl.}{H.\pi}}$.

Beispiel 1. Wie groß muß der Durchmesser des Kolbens einer Saugpumpe seyn, welche bei 30 Kolbenspielen in einer Minute und einer Hubhöhe von 12 Zoll Duodez. Maß in einer Stunde 48 Eimer Wasser geben soll, da die bayersche Maß 43 Dezimalkubikzoll faßt.

Auflösung. Die Pumpe muß in einer Minute $\frac{48}{60}$ Eimer $=$ 48 Maß geben; es treffen daher auf ein Kolbenspiel $\frac{48}{30}$ $= 1,6$ Maß, welche $43\ c''. 1,6 = 68,8\ c''$ Raum einnehmen. Diesen Raum muß aber ein Cylinder fassen, welcher zur Höhe die Hubhöhe 12'' Duod. Maß $=$ 10'' Dez. Maß, und zum Durchmesser den Durchmesser des Kolbens hat. Es ist daher der Durchmesser desselben $D = 2\sqrt{\frac{Cyl.}{H.\pi}} = 2\sqrt{\frac{68,8}{10.3,14}} = 2.1,48'' = 2,96''\ d = 3\frac{1}{2}''\ dd$ nahe.

Zusatz 2. Cylinder von gleichen Durchmessern und Höhen sind gleich (§. 190. Zus. 3).

Zusatz 3. Cylinder verhalten sich wie die Producte aus den Quadraten ihrer Halb- oder Durchmesser und ihrer Höhen; bei gleichen Höhen, wie die Quadrate der Durchmesser, und bei gleichen Durchmessern wie ihre Höhen. Denn bezeichnen C und c die Cylinder, R und r ihre Halbmesser, D und d ihre Durchmesser und H und h ihre Höhen, so ist

$$C : c = R^2\pi.H : r^2\pi.h$$

oder $C : c = R^2.H : r^2.h$,

und $C : c = \frac{1}{4}D^2\pi.H : \frac{1}{4}d^2\pi.h$

oder $C : c = D^2.H : d^2.h^2$

Ist nun $H = h$, so ist $C : c = D^2 : h^2$

und ist $D = d$, $C : c = H : h$

Beispiel. Ein Mühlstein von Basalt, von 4 Fuß Durchmesser und 2 Fuß Höhe, ist 1740 ℔ schwer; wie schwer wird ein Mühlstein von Quarz, von 3 Fuß Durchmesser und 1′ 8″ Höhe seyn, wenn zwei gleich große Stücke von Basalt und Quarz sich dem Gewichte nach wie 13:15 verhalten?

Zusatz 4. Den körperlichen Inhalt einer cylindrischen Röhre d. h. des Raumes, welcher zwischen zwei Cylindern enthalten ist, welche über zwei concentrischen Kreisen stehen, und eine gemeinschaftliche Achse und einerlei Höhe H haben, findet man, wenn man von dem Inhalt des größern Cylinders den des kleinern wegnimmt. Bezeichnet D den Durchmesser des größern (äußern) Cylinders und d den Durchmesser des kleinern (innern) Cylinders, so ist der Inhalt der cylindrischen Röhre $= \frac{1}{4} D^2 \pi . H - \frac{1}{4} d^2 \pi . H = \frac{1}{4} H \pi (D^2 - d^2) = \frac{1}{4} H \pi (D + d)(D - d)$.

Beispiel 1. Was kostet eine 30′ lange bleierne Röhre, deren Durchmesser im Lichten 3″ und deren Metallstärke 7‴ Dez. Maß mißt, da ein Kubikfuß Blei 500 ℔ wiegt, und das Pfund Blei daran 12 kr. kostet?

Auflösung. Es ist hier $d = 3''$ und $D = 3'' + 14''' = 4''\, 4''' = 4,4''$, dann $H = 30' = 300''$; mithin der Inhalt der Röhre $= \frac{1}{4} . 300 . 3,14 . (4,4 + 3) . (4,4 - 3)\, c'' = 2439,78\, c'' = 2,44\, c'$ beinahe. Das Gewicht der Röhre beträgt demnach 500 ℔ . 2,44 = 1220 ℔, und der Preis derselben ist 0,2 fl. . 1220 = 244 fl.

Beispiel 2. Welchen Kubikinhalt hat das Mauerwerk eines Tonnengewölbes, wenn seine Weite 42′, seine Dicke 2′ und seine Länge 72′ hält?

§. 191.

Aufgabe. Einen Visirstab zu verfertigen, mit welchem man den Inhalt eines cylindrischen Gefäßes nach dem landesüblichen Getränkmaß z. B. in bayerischen Maßen finden kann.

Auflösung und Beweis. Man trage den Durchmesser d eines cylindrischen Gefäßes, welches eine bayersche Maß faßt, auf die beiden Schenkel eines rechten Winkels (Fig. 174) von A nach a und B und ziehe aB, trage aB von A aus auf AC, so daß also Ab = aB wird, so ist, da $aB^2 = Aa^2 + AB^2 = d^2 + d^2 = 2d^2$

(§. 111), $Ab^2 = 2d^2$. Zieht man wieder die Hypotenuse Bb, und trägt sie von A aus auf den Schenkel AC, so daß also $Ac = Bb$ wird, so ist, da $Bb^2 = Ab^2 + AB^2 = 2d^2 + d^2 = 3d^2$, $Ac^2 = 3d^2$. In gleicher Art verzeichne man die Linien Ae, Af rc. rc., so wird $Ae^2 = 4d^2$, $Af^2 = 5d^2$ rc.

Nun nehme man einen senkrechten prismatischen Stab (Visirstab) (Fig. 175), mache auf der einen Seite desselben $E1 = Aa$, $E2 = Ab$, $E3 = Ac$ rc. so ist $E1^2 = Aa^2 = d^2$, $E2^2 = Ab^2 = 2d^2$, $E3^2 = Ac^2 = 3d^2$ rc. Auf der andern Seite des Stabes mache man $G1 =$ der Höhe h des cylindrischen Maßgefäßes, $G2 = 2h$, $G3 = 3h$ rc.

Will man nun den Inhalt eines cylindrischen Gefäßes in Maßen angeben, so messe man mit dem Visirstab auf der Seite EF desselben (von E aus angefangen) den Durchmesser und auf der andern Seite GH (von G angefangen) die Tiefe des Gefäßes (im Lichten). Es gebe z. B. der Visirstab den Durchmesser auf E3 und die Tiefe auf G4 an. Nun multiplicire man die Zahlen 3 und 4, so gibt ihr Product, nämlich 12, die Zahl der im Gefäße enthaltenen Maße an.

Denn es bezeichne c den Inhalt des cylindrischen Maßgeschirres und C den Inhalt des andern cylindrischen Gefäßes, dessen Durchmesser D in unserm Beispiel nach dem Visirstab E3 und dessen Höhe H G4 ist,

so ist $$C : c = D^2 . H : d^2 . h \quad (\text{§. 190. Zus. 3})$$

oder $$C : c = E3^2 . G4 : d^2 . h,$$

mithin, weil nach der Einrichtung des Visirstabes $E3^2 = 3d^2$ und $G4 = 4h$ ist,

$$C : c = 3d^2 . 4h : d^2 . h$$

oder $$C : c = 3 \;. 4 \;: 1 \;. 1.$$

Es ist daher $$C = 3 \;. 4c = 3 . 4 \text{ Maß}.$$

Zusatz 1. Ein Visirstab von der eben gezeigten Einrichtung heißt ein quadratischer oder cylindrischer.

Zusatz 2. Nach Lambert findet man den Inhalt eines vollen Faßes mit gleichen Faßböden, wenn man zu dem zweifachen Inhalt eines Cylinders, welcher die Länge MN (Fig. 176) des Faßes zur Höhe und die Spundtiefe RS zum Durchmesser hat, den

Inhalt eines andern Cylinders, dessen Höhe ebenfalls die Faßlänge MN und dessen Durchmesser die Bodentiefe MO ist, addirt, und die Summe durch 3 dividirt *). Bezeichnet F den Inhalt des Faßes, C den erstern Cylinder und C′ den zweiten, so ist $F = \frac{2C + C'}{3}$.

Will man nun nach dieser Regel mit Hilfe des cylindrischen Visirstabes den Inhalt eines Faßes mit gleichen Böden in Maßen bestimmen, so messe man mit der Seite EF des Visirstabes die Spundtiefe RS und die Bodentiefe MO des Faßes, und merke die Zahlen, auf welche sie treffen z. B. 6 und 5, wenn RS = E6 und MO = E5 ist. Ebenso messe man mit der andern Seite GH des Visirstabes die Faßlänge MN, und bemerke wieder die Zahl, welche sie bestimmt, z. B. 8, wenn MN = G8 ist. Nun addire man zur zweifachen Zahl (6) der Spundtiefe die Bodentiefe (5), multiplicire diese Summe mit der Faßlänge (8) und dividire das Product durch 3, so gibt der Quotient die Menge der im Faße enthaltenen Flüssigkeit in Maßen an. Denn es ist $F = \frac{2C + C'}{3}$; nun ist aber hier nach dem Visirstab $C = 6.8$ Maß und $C' = 5.8$ Maß (Aufl. d. Aufg.), mithin ist $F = \frac{2.6.8 + 5.8}{3}$ Maß $= \frac{(2.6 + 5).8}{3}$ Maß, also $= 45\frac{1}{3}$ Maß.

Zusatz 3. Betrachtet man, wie dieß in Fällen, wo nicht viel Genauigkeit erforderlich ist, gewöhnlich geschieht, den Inhalt eines Faßes als den eines Cylinders, welcher die Länge des Faßes zur Höhe, und das arithmetische Mittel zwischen der Spund- und Bodentiefe zum Durchmesser hat; so erhält man in dem vorigen Beispiel als Inhalt des Faßes $(\frac{6+5}{2}).8 = 44$ Maß, welches von dem vorhin erhaltenen genauern Resultat um $1\frac{1}{3}$ Maß abweicht.

§. 192.

Aufgabe. Den Kubikinhalt einer Pyramide zu berechnen.

Auflösung. Man berechne den Inhalt G der Grundfläche, multiplicire ihn mit der Höhe H der Pyramide, und nehme von dem Product den dritten Theil.

*) Lamberts mathematische Beiträge.

Beweis. Ist die Pyramide dreiseitig, so ist sie der dritte Theil eines dreiseitigen Prisma auf der nämlichen Grundfläche und von gleicher Höhe (§. 177). Es ist aber dieses $= G.H$ (§. 189), mithin ist Pyr. $= \frac{G.H}{3}$.

Ist aber die Pyramide mehrseitig (Fig. 177), so zertheile man sie durch Diagonalebenen, welche man durch denselben Punkt A der Grundfläche legt, in lauter dreiseitige p, p', p'', so haben diese mit der mehrseitigen gleiche Höhe H, da sie eine gemeinschaftliche Spitze haben, und ihre Grundflächen in einerlei Ebene liegen (§. 145, Zus. 1). Bezeichnen g, g', g'' die Grundflächen dieser einzelnen dreiseitigen Pyramiden, so ist die mehrseitige Pyramide $= p + p' + p'' = \frac{g.H}{3} + \frac{g'.H}{3} + \frac{g''.H}{3} = (g + g' + g'').\frac{H}{3} = G.\frac{H}{3} = \frac{G.H}{3}$, da $g + g' + g'' = G$ ist.

Beispiel 1. Wie groß ist der Kubikinhalt eines ganzen Walmdaches (Fig. 178), welches 60' lang, 40' breit und 20' hoch ist, und am First 42' hält?

Auflösung. Fällt man von den Endpunkten E und F des Firstes auf die Bodenebene des Daches die Senkrechten EI und FM, zieht durch I und M GH und KL parallel zu AB, und legt durch E, G, H und F, K, L Ebenen, so wird der Dachraum in ein dreiseitiges Prisma und zwei gleiche vierseitige Pyramiden (§. 176) zerlegt. Nun ist $\triangle$ EGH $= \frac{40.20}{2}$ □' $= 400$ □'; ferner, weil AH $=$ DL $= \frac{AD - HL}{2} = \frac{60' - 42'}{2} = 9'$ ist, Rechteck AG $= 40.9$ □' $= 360$ □'. Der Inhalt des Prisma ist daher $= 400.42$ c' $= 16800$ c' und der Inhalt einer der zwei gleichen Pyramiden $\frac{360.20}{3}$ c' $= 2400$ c'. Das ganze Dach hält daher 16800 c' + 4800 c' $=$ 21600 c' $=$ 100 c. Klafter.

Beispiel 2. Die Pyramide des Cestius bei Rom, neben welcher die daselbst mit Tod abgehenden deutschen Künstler begraben werden, ist 113 Fuß hoch, und hat eine quadratförmige

Grundfläche, deren Breite 86′ beträgt; wie groß ist der Kubikinhalt derselben?

Zusatz 1. Aus Pyr. $= \frac{G.H}{3}$ ist $G = \frac{3\,Pyr.}{H}$ und $H = \frac{3\,Pyr.}{G}$.

Zusatz 2. Alle Pyramiden mit gleichen Grundflächen und Höhen sind gleich.

Zusatz 3. Eine jede Pyramide ist der dritte Theil irgend eines Prisma von gleicher Grundfläche und Höhe; denn er ist letzteres $= G.H$ und erstere $= \frac{G.H}{3}$.

Zusatz 4. Mehrere Pyramiden p, p', p'' von gleicher Höhe H sind einer einzigen P von der nämlichen Höhe gleich, deren Grundfläche G eben so groß ist, als die Grundflächen g, g', g'' der einzelnen Pyramiden zusammen (Bew. d. Aufl.)

Zusatz 5. Pyramiden (Kegel) verhalten sich als dritte Theile von Prismen mit gleichen Grundflächen und Höhen (Zus. 3) wie ihre Ganzen: also wie die Producte aus ihren Grundflächen und Höhen; bei gleichen Grundflächen wie ihre Höhen und bei gleichen Höhen wie ihre Grundflächen (§. 189. Zus. 2).

§. 193.

Aufgabe. Den Kubikinhalt eines Kegels zu berechnen.

Auflösung. Da ein Kegel als eine unendlichseitige Pyramide betrachtet werden kann (§. 169. Zus. 3), so findet man seinen Kubikinhalt, wenn man den Inhalt seiner Grundfläche mit seiner Höhe multiplicirt und das Product durch 3 dividirt (§. 192). Bezeichnet R den Halbmesser und D den Durchmesser der Grundfläche des Kegels, dann H seine Höhe, so ist, da hier $G = R^2\pi$ ist, sein Inhalt $K = \frac{R^2\pi.H}{3}$, oder weil $R^2 = \frac{1}{4}D^2$, $K = \frac{\frac{1}{4}D^2\pi.H}{3} = \frac{1}{12}D^2\pi.H$.

Beispiel 1. Welchen Raumesinhalt hat das kegelförmige Dach eines runden Thurmes, wenn dasselbe 30 Fuß Durchmesser und 36 Fuß Höhe hat?

Auflösung. Es ist hier $D = 30'$ und $H = 36'$, mithin $K = \frac{1}{12}.30^2.3{,}14.36\ c' = 8478\ c'$.

Beispiel 2. Wie schwer wiegt ein bleierner gleichseitiger Kegel, dessen Durchmesser 12″ und dessen **Seite** 10″ Dez. Maß mißt; da ein Kubikfuß Wasser 44, 17 Pfd. wiegt, und das Blei 11, 325 mal so schwer als das Wasser ist?

Zusatz 1. Aus $K = \frac{R^2\pi.H}{3}$ ist $H = \frac{3K}{R^2\pi}$, $R = \sqrt{\frac{3K}{H\pi}}$ und $D = 2\sqrt{\frac{3K}{H\pi}}$.

Zusatz 2. Alle Kegel von gleichen Durchmessern und Höhen sind gleich (§. 192. Zus. 2).

Zusatz 3. Ein jeder Kegel ist der dritte Theil eines Cylinders von gleichem Durchmesser und gleicher Höhe (§. 192. Zus. 3).

Zusatz 4. Kegel verhalten sich wie die Producte aus den Quadraten ihrer Halb- oder Durchmesser und ihren Höhen; bei gleichen Höhen wie die Quadrate der Durchmesser und bei gleichen Durchmessern wie ihre Höhen (Zus. 3, und §. 190. Zus. 3).

§. 194.

Aufgabe. Den Kubikinhalt einer abgekürzten Pyramide (Fig. 150) aus ihren Grundflächen und ihrer Höhe zu berechnen.

Auflösung. Es seien die Grundflächen der abgekürzten Pyramide G und g, ihre Höhe H und ihr Inhalt P. Der Inhalt der ganzen Pyramide sei p und ihre Höhe h, der Inhalt der abgeschnittenen Pyramide p′ und ihre Höhe h′, so ist offenbar

$P = p - p' = \frac{1}{3} G.h - \frac{1}{3} g.h' = \frac{1}{3}(G.h - g.h')$ (§. 192).

Nun ist aber $G : g = h^2 : h'^2$ (§. 167. Zus. 3);

und mithin $\sqrt{G} : \sqrt{g} = h : h'$ (Arithm.).

Setzt man der leichtern Berechnung wegen einstweilen $\sqrt{G} = B$ und $\sqrt{g} = b$, so ist

$$B : b = h : h', \text{ mithin auch}$$

$$\begin{cases} B - b : h - h' = B : h \text{ und} \\ B - b : h - h' = b : h' \text{ (Arithm.)} \end{cases}$$

Es ist aber $h - h' = H$, und daher

$$\begin{cases} B - b : H = B : h, \text{ und} \\ B - b : H = b : h', \end{cases}$$

woraus $h = \frac{B.H}{B-b}$ und $h' = \frac{b.H}{B-b}$ ist.

Es ist daher $P = \frac{1}{3}(G.h - g.h') = \frac{1}{3}(G.\frac{B.H}{B-b} - g.\frac{b.H}{B-b})$, oder weil oben $\sqrt{G} = B$ und $\sqrt{g} = b$, mithin $G = B^2$ und $g = b^2$ gesetzt wurde,

$$P = \frac{1}{3}(B^2.\frac{B.H}{B-b} - b^2.\frac{b.H}{B-b}) = \frac{1}{3}(\frac{B^3.H}{B-b} - \frac{b^3.H}{B-b})$$

$$= \frac{1}{3}(\frac{B^3.H - b^3.H}{B-b}) = \frac{1}{3}H(\frac{B^3-b^3}{B-b}).$$

Dividirt man wirklich (B^3-b^3) durch $B-b$, so ergibt sich $\frac{B^3-b^3}{B-b} = B^2+Bb+b^2$, und es ist daher

$P = \frac{1}{3}H(B^2+Bb+b^2)$ mithin, (weil $B=\sqrt{G}$, und $b=\sqrt{g}$ ist),

$P = \frac{1}{3}H(G+\sqrt{G}.\sqrt{g}+g) = \frac{1}{3}H(G+\sqrt{G.g}+g)$.

Beispiel. Wie groß ist das Gewicht eines marmornen Denkmales von der Form einer abgekürzten Pyramide mit quadratischer Grundfläche, wenn eine Seite der untern Grundfläche 3′, eine Seite der obern Grundfläche 2′ und die Höhe 6′ hält, und ein Kubikfuß Marmor nahe 120 Pfd. wiegt?

Auflösung. Es ist hier $H = 6'$, $G = 3^2 = 9\,\square'$ und $g = 2^2 = 4\,\square'$, mithin der Inhalt der abgekürzten Pyramide $= \frac{1}{3}.6.(9+\sqrt{36}+4) = 38$ c′. Das Gewicht des Denkmales beträgt daher 120 Pfd.. 38 = 45 Ctnr. 60 Pfd.

Zusatz. Sollte die Entwicklung der Formel für die Berechnung des Inhaltes der abgekürzten Pyramide als zu schwer erscheinen, und man will ohne dieselbe den Inhalt einer solchen berechnen, so suche man für jeden einzelnen gegebenen Fall die Höhe h der ganzen und die Höhe h′ der abgeschnittenen Pyramide, berechne den Inhalt beider, und subtrahire den der letzteren von dem der ersteren. Da nämlich $B:b = h^2:h'^2$ (§. 167. Zus. 3) ist, so ist für obiges Beispiel $9:4 = h^2:h'^2$ und

$\sqrt{9}:\sqrt{4} = h:h'$

d. h. $3:2 = h:h'$.

Es ist daher $3-2:h-h' = 3:h'$

oder weil $h-h' = H = 6'$ ist,

$1:6 = 3:h$,

woraus man $h = 18'$, und dann $h' = 18' - 6' = 12'$ findet. Der

Inhalt der ganzen Pyramide ist $\frac{9.18}{3}$ c'=54 c', der der abgeschnittenen $\frac{4.12}{3}$ c'=16 c', also der Inhalt der abgekürzten = 54 c' — 16 c'=38 c', wie oben.

§. 195.

Aufgabe. Den Kubikinhalt eines abgekürzten Kegels zu berechnen.

Auflösung. Es sei der Halbmesser der größern Grundfläche R, der Halbmesser der kleinern r und die Höhe des abgekürzten Kegels H. Da ein abgekürzter Kegel als eine abgekürzte Pyramide mit unendlich vielen Seitenflächen betrachtet werden kann (§. 170. Zus. 1), so ist sein Inhalt $K = \frac{1}{3} H (G + \sqrt{G.g} + g)$ (§. 194) Nun ist aber beim abgekürzten Kegel $G = R^2\pi$ und $g = r^2\pi$, mithin $K = \frac{1}{3} H (R^2 \pi + \sqrt{R^2 \pi . r^2 \pi} + r^2 \pi)$

$$= \frac{1}{3} H (R^2 \pi + \sqrt{R^2 . r^2 . \pi^2} + r^2 \pi)$$
$$= \frac{1}{3} H (R^2 \pi + Rr \pi + r^2 \pi)$$
$$= \frac{1}{3} H \pi (R^2 + Rr + r^2).$$

Beispiel 1. Wie viel Kubikfuß Holz gibt ein Stamm, dessen Durchmesser am Stammende 2', am Zopfe 1' 2" Dez. Maß und dessen Länge 30' hält?

Auflösung. Es ist hier H=30', R = 1' und r=0, 6', mithin der Inhalt des Stammes $= \frac{1}{3} . 30 . 3, 14 (1^2 + 1 . 0, 6 + 0, 6^2)$ c' = 61, 544 c'.

Das Resultat der nämlichen Aufgabe ist nach der im Beispiel 1. §. 190 angegebenen Berechnungsart 60, 288 c', welches von dem wahren Inhalt um 1, 256 c' abweicht.

Beispiel 2. Ein bayerscher Schäffel hält 8944 bayersche Dezimalkubikzolle. Wenn nun ein Schäffelmaß, welches gewöhnlich die Form eines abgekürzten Kegels hat, verfertigt werden soll, und man nimmt zum obern Durchmesser im Lichten 24" und zum untern 28" Dez. Maß, wie tief muß das Maß werden?

Zusatz. Die Formel für die Berechnung des Inhaltes eines abgekürzten Kegels kann man auch mit Uebergehung des §. 194 so finden: Es bezeichne K den abgekürzten, k den ganzen und k' den

abgeschnittenen Kegel, so ist (Fig. 152) $K = k - k' = \frac{1}{3} R^2 \pi . DC - \frac{1}{3} r^2 \pi . DI = \frac{1}{3} \pi (R^2 . DC - r^2 . DI)$ (§. 193).

Nun ist aber, da $GI \parallel AC$ (§. 154 Zus. 1),

im $\triangle$ ACD $\quad DI : DC = GI : AC$ (§. 95. Zus. 1)

oder $\quad DC : DI = AC : GI$,

mithin auch $\quad \begin{cases} DC - DI : AC - GI = DC : AC \\ DC - DI : AC - GI = DI : GI \end{cases}$ (Arithm.)

oder weil $\quad DC - DI = CI = H$, $AC = R$ u. $GI = r$ ist,

$$\begin{cases} H : R - r = DC : R \text{ und} \\ H : R - r = DI : r, \end{cases}$$

woraus $DC = \frac{H . R}{R - r}$ und $DI = \frac{H . r}{R - r}$ ist.

Es ist daher $K = \frac{1}{3} \pi (R^2 . DC - r^2 . DI)$

$$= \frac{1}{3} \pi (R^2 . \frac{H . R}{R - r} - r^2 . \frac{H . r}{R - r}) = \frac{1}{3} \pi (\frac{R^3 . H}{R - r} - \frac{r^3 . H}{R - r})$$

$$= \frac{1}{3} \pi H (\frac{R^3}{R - r} - \frac{r^3}{R - r}) = \frac{1}{3} \pi H (\frac{R^3 - r^3}{R - r})$$

$$= \frac{1}{3} H \pi (R^2 + Rr + r^2).$$

§. 196.

Aufgabe. Den Kubikinhalt eines Kugelausschnittes (Fig. 153) und einer Kugel zu berechnen.

Auflösung und Beweis. Man denke sich die krumme Fläche FGHB des Kugelausschnittes, welche seine Grundfläche genannt werden kann (§. 172), in unendlich viele kleine Theilchen getheilt, und nach allen Punkten der Perimeter dieser Theilchen Halbmesser der Kugel gezogen, so wird, da die unendlich kleinen Theilchen der Grundfläche als eben betrachtet werden können (Vergl. §. 91), der Kugelausschnitt offenbar in unendlich viele Pyramiden von unendlich kleinen Grundflächen getheilt, welche alle ihre Spitze in der Spitze C des Kugelausschnittes oder im Mittelpunkt seiner Kugel und zur Höhe den Halbmesser r derselben haben. Nun sind aber alle diese Pyramiden zusammen einer einzigen von der nämlichen Höhe r gleich, deren Grundfläche die Summe der Grundflächen jener d. h. die Grundfläche G des Kugelausschnittes ist (§. 192. Zus. 4). Es ist daher die Summe aller Pyramiden oder

der Inhalt des Kugelausschnittes $= \frac{1}{3}$ G.r (§. 192). Da aber die Grundfläche G des Kugelausschnittes die krumme Oberfläche des Kugelabschnittes FGHB von der Höhe BE=h ist, so ist $G = 2r\pi.h$ (§. 184) und mithin Sect. $= \frac{1}{3}.2r\pi h.r = \frac{2}{3}r^2\pi.h$.

Die Halbkugel ist ein Kugelausschnitt, in welchem h=r ist; es ist daher der Inhalt derselben $= \frac{2}{3}r^2\pi.r = \frac{2}{3}r^3\pi$.

Der Inhalt Sph. der ganzen Kugel ist daher $= \frac{4}{3}r^3\pi$, oder weil $\frac{4}{3}r^3 = \frac{4}{3}.(\frac{1}{2}d)^3 = \frac{4}{3}.\frac{1}{8}d^3 = \frac{1}{6}d^3$ ist, so ist Sph. $= \frac{1}{6}d^3\pi$.

Da $\frac{1}{6}d^3\pi = d^3.\frac{\pi}{6} = d^3.0,52359877..$ ist, so ist Sph. $= d^3.0,52359877...$

Beispiel 1. Wie groß ist der Kubikinhalt unserer Erde, ihren Durchmesser zu 1719 Meilen genommen?

Auflösung. Es ist Sph. $= \frac{d^3\pi}{6} = 1719^3.0,5236$ c. M. $= 2659667019$ c. M.

Beispiel 2. Ein Kugelgewölbe hat einen innern Durchmesser von 40′ und eine Gewölbdicke von 2′; wie groß ist der lichte Raum des Gewölbes — wie groß der Inhalt des Mauerwerkes?

Zusatz 1. Aus Sph. $= \frac{1}{6}d^3\pi$ ist $d^3\pi = 6$ Sph., $d^3 = \frac{6\,\text{Sph.}}{\pi}$ und $d = \sqrt[3]{\frac{6\,\text{Sph.}}{\pi}}$ oder $d = \sqrt[3]{\text{Sph.}\,\frac{6}{\pi}}$ $= \sqrt{\text{Sph.}.1,909859317..}$

Beispiel. Wie groß ist der Durchmesser einer 40pfündigen eisernen Kugel, da das spezifische Gewicht des Eisens 7,205 ist, und ein Kubikfuß Wasser 44,17 Pfd. wiegt?

Auflösung. Ein Kubikfuß Eisen wiegt 44,17.7,205 Pfd., mithin hält die Kugel $\frac{40}{44,17.7,205}$ c′, und es ist daher der Durchmesser derselben $d = \sqrt[3]{\left(\frac{40}{44,17.7,205}.1,909859\right)}$ $= 0,62148' = 6'' \; 2''' \; 1,5''''$ Dez. M. sehr nahe.

Zusatz 2. Zwei Kugeln verhalten sich ihrem Inhalte nach wie die Kubikzahlen ihrer Halbmesser oder Durchmesser. Denn heißen die Kugeln Sph. und sph., ihre Halbmesser R und r und

ihre Durchmesser D und d, so ist $Sph. = \frac{4}{3} R^3 \pi$ und $sph. = \frac{4}{3} r^3 \pi$; mithin ist

$$Sph.:sph. = \tfrac{4}{3} R^3 \pi : \tfrac{4}{3} r^3 \pi$$

oder

$$Sph.:sph. = R^3 : r^3 = \tfrac{1}{8} D^3 : \tfrac{1}{8} d^3$$
$$= D^3 : d^3$$

Beispiel 1. Eine 40pfündige eiserne Kugel hat einen Durchmesser von 6, 2″ Dez. M.; wie schwer wiegt eine Kugel von derselben Materie, deren Durchmesser 9, 3″ Dez. M. mißt?

Auflösung. Die Gewichte der Körper von der nämlichen Materie verhalten sich offenbar wie ihre Räume; es ist daher $(6, 2)^3 : (9, 3)^3 = 40 : x$, woraus sich $x = 135$ Pfd. ergibt.

Beispiel 2. Die Erde ist nahe 50, 653 mal größer als der Mond; wie viel mal größer ist der Erdendurchmesser als der Monddurchmesser?

Zusatz 3. Ein Kegel, eine Kugel und ein Cylinder verhalten sich wie die Zahlen 1:2:3, wenn der Kegel und der Cylinder einen größten Kreis der Kugel zur Grundfläche und den Durchmesser derselben zur Höhe haben. Denn es ist in diesem Falle

der Kegel $= \frac{1}{3} r^2 \pi . 2r = \frac{2}{3} r^3 \pi$ (§. 193)

die Kugel $= \frac{4}{3} r^3 \pi$

der Cylinder $= r^2 \pi . 2r = 2 r^3 \pi$, mithin ist

Keg.:Kug.:Cyl. $= \frac{2}{3} r^3 \pi : \frac{4}{3} r^3 \pi : 2 r^3 \pi$ oder

Keg.:Kug.:Cyl. $= 2 : 4 : 6$

$= 1 : 2 : 3.$

§. 197.

Aufgabe. Den Kubikinhalt eines Kugelabschnittes (Fig. 171) zu berechnen.

Auflösung und Beweis. Man setze die Höhe FH des Kugelabschnittes $= h$ und den Halbmesser der Kugel $= r$, so ist der Kugelausschnitt DHEC $= \frac{2}{3} r^2 \pi . h$ (§. 196) und der Kegel DCE $= \frac{1}{3} DF^2 . \pi . CF$ (§. 193). Nun ist aber FH:DF:FM (§. 109. Zus. 1) und $DF^2 = FH . FM = h . (2r - h) = 2rh - h^2$; ferner $CF = CH - GH = r - h$. Es ist daher Kegel DCE $= \frac{1}{3} (2rh - h^2) . \pi . (r - h) = \frac{1}{3} (2r^2 h - 3rh^2 + h^3) \pi$. Man erhält aber offenbar den Abschnitt DHE, wenn man den Kegel DCE vom

Ausschnitt DHEC abzieht; es ist daher Segm. DHE $= \frac{2}{3} r^2 \pi . h$ $- \frac{1}{3} (2r^2 h - 3rh^2 + h^3) \pi = \frac{2}{3} r^2 \pi h - \frac{2}{3} r^2 \pi h + r\pi h^2 - \frac{h^3 \pi}{3}$ $= r\pi h^2 - \frac{h^3 \pi}{3} = h^2 \pi (r - \frac{h}{3})$.

Beispiel. Eine Glaskugel von 8 Dezimalzoll innerm Durchmesser ist bis auf den vierten Theil ihrer Höhe (ihres Durchmessers) mit Wasser gefüllt; wie viel Maß Wasser enthält sie, da 43 Dezimalkubikzoll eine Maß geben?

Auflösung. Es ist hier $r = 4''$ und $h = 6''$, mithin Segm. $= 6^2 . 3, 14 . (4 - \frac{6}{3})$ c'' $= 226, 08$ c'' $= 5\frac{1}{4}$ Maß.

Zusatz 1. Will man statt des Kugelhalbmessers r den Halbmesser DF $= \rho$ der Grundfläche des Segmentes in die Formel einführen, so ist, wenn man DH und DM zieht, HDM $= 90^\circ$ (§. 70. Zus. 3) und in den ähnlichen Dreiecken DHF und DHM

$$FH : DH = DH : HM \text{ (Vergl. Bew. §. 111)}$$

oder

$$h : DH = DH : 2r,$$

woraus sich $2r = \frac{DH^2}{h}$, oder weil $DH^2 = DF^2 + FH^2 = \rho^2 + h^2$ ist (§. 111); $2r = \frac{\rho^2 + h^2}{h}$, und mithin $r = \frac{\rho^2 + h^2}{2h}$ ergibt.

Es ist daher Segm. $= h^2 \pi (r - \frac{1}{3} h) = h^2 \pi (\frac{\rho^2 + h^2}{2h} - \frac{1}{3} h)$ $= h^2 \pi (\frac{3\rho^2 + 3h^2 - 2h^2}{6h}) = \frac{1}{6} h \pi (3\rho^2 + h^2)$.

Beispiel. Ein rundes Schildgewölbe hat eine Weite von 36', eine Höhe von 18' und eine Dicke von 2'; wie groß ist der lichte Raum desselben — und wie groß der Inhalt des Mauerwerkes?

Auflösung. Es ist für diesen Fall $\rho = \frac{36'}{2} = 18'$ und $h = 18'$, mithin der lichte Raum des Gewölbes $= \frac{1}{6} . 18 . 3, 14 .$ $(3 . 18^2 + 18^2) = 12208, 32$ c'.

Die Beantwortung der zweiten Frage zur Selbstübung!

Zusatz 2. Setzt man in der Formel Segm. $= \frac{1}{6} h\pi (3\rho^2 + h^2)$ $h = 2r$, so muß $\rho = 0$ werden; alsdann geht aber das Seg-

ment in die ganze Kugel über, und es ist folglich Sph. $= \frac{1}{6} . 2r . \pi . (0 + 4r^2) = \frac{8r^3\pi}{6} = \frac{4}{3}r^3\pi$, wie in §. 196.

Zusatz 3. Den Kubikinhalt einer körperlichen Zone ABDE (Fig. 171) findet man, wenn man vom Inhalte des größern Segmentes DHE den Inhalt des kleinern AHB abzieht.

§. 198.

Aufgabe. Den Kubikinhalt eines physischen Körpers von unregelmäßiger Form zu berechnen.

Auflösung. Man nehme ein senkrechtes prismatisches Gefäß von gehöriger Größe, an dessen einer Wand eine Linie gezeichnet ist, welche auf der Grundlinie der rechteckigen Wand, und mithin auch auf dem Boden des Gefäßes selbst senkrecht steht (§. 152. Zus. 1), und in Fuße, Zolle, Linien getheilt ist. Hat man nun den Inhalt eines physischen Körpers von ungewöhnlicher Form zu bestimmen, so stelle man das Gefäß auf eine horizontale Ebene, lege den Körper hinein und fülle das Gefäß mit Wasser, vorausgesetzt, daß der Körper die Eigenschaft besitzt, daß er nicht im Wasser verdirbt, oder dasselbe schnell anzieht. Im letztern Fall kann man statt Wasser etwa feinen Sand nehmen. Nun nehme man den Körper wieder sorgfältig heraus, so daß kein Wasser oder Sand verloren geht, und sehe, um wie viel das Wasser oder der Sand gefallen ist, berechne alsdann den jetzt lichten Raum, der vorher vom Wasser oder Sande angefüllt war, so hat man den Inhalt des Körpers, da dieser jenem offenbar gleich seyn muß.

Man könnte auch das Wasser zuerst in das Gefäß gießen, den Körper darin versenken und bemerken, um wie viel das Wasser gestiegen ist, und alsdann den prismatischen Raum zwischen dem vorigen und jetzigen Wasserspiegel im Gefäße berechnen, welcher ebenfalls dem Inhalt des Körpers gleich seyn muß.

Beispiel. Ein gußeisernes Figürchen wurde in ein prismatisches Gefäß geleget, und dasselbe mit Wasser gefüllt; als man es wieder herauszog, sank das Wasser um 2'' 5''', welchen körperlichen Inhalt hat dieses Figürchen, da das Gefäß einen quadratischen Boden hat, welcher innen 8'' breit ist?

Auflösung. Der Inhalt des Figürchens ist $= 8^2 . 2, 5$ c″ $= 160$ c″.

Zusatz. Der körperliche Inhalt der Masse eines Körpers läßt sich sehr einfach aus seinem absoluten und spezifischen Gewichte bestimmen. Man nennt absolutes Gewicht eines Körpers das, was er an und für sich wiegt, z. B. 4 Pfd., spezifisches Gewicht aber die Zahl, welche ausdrückt, wie vielmal schwerer ein beliebiges Stück desselben ist, als eine Menge destillirten Wassers von gleichem Raumesinhalt. Bezeichnet g das absolute Gewicht in Pfunden und s das spezifische Gewicht eines Körpers, so wiegt ein Kubikfuß davon, da ein bayerscher Kubikfuß Wasser 44, 17 bayr. Pfd. wiegt, 44, 17.s Pfd., und es ist, da die Gewichte zweier Stücke von der nämlichen Materie offenbar mit ihren Räumen in Proportion stehen,

$$44, 17 . s : g = 1\, c' : x,$$

woraus sich $x = \frac{g}{44, 17 . s}\, c'$ ergibt.

Beispiel. Eine hohle eiserne Kugel hat einen Durchmesser von 6″ Dez. Maß, und wiegt 24 Pfd.; wie groß ist der hohle Raum, da das spez. Gewicht des Eisens 7, 2 ist?

Auflösung. Die ganze Kugel nimmt einen Raum von $\frac{6^3 . 3, 1416}{6}$ c″ $= 113, 0976$ c″, das Eisen daran aber einen Raum von $\frac{24}{44, 17 . 7, 2}$ c′ $= 0, 0754660$ c′ $= 75, 4660$ c″ ein. Der hohle Raum hält daher $113, 0976$ c″ $- 75, 4660$ c″ $= 37, 6316$ c″ $= 37$ c″ 632 c‴ Dez. Maß beinahe.

§. 199.

Erklärung. Geometrische Körper heißen ähnlich, wenn sie von gleich vielen einander ähnlichen und gleich gegeneinander geneigten Seitenflächen in derselben Ordnung eingeschlossen sind.

§. 200.

Lehrsatz. Aehnliche Prismen verhalten sich wie die Kubikzahlen ihrer gleichliegenden Seitenlinien oder Höhen.

Beweis. Man hat hier zwei Fälle zu unterscheiden: entweder sind die Prismen von den ähnlichen und gleichgegeneinander geneigten Grund- und Seitenflächen auch in derselben Folge und gegenseitigen Lage eingeschlossen (Fig. 179 und 180), oder nicht (Fig. 179 und 181).

Im ersten Fall läßt sich das kleinere Prisma p so in das größere P legen, daß zwei gleichliegende Ecken d und D derselben sich decken, da die Winkel adf und ADF, ade und ADE und edf und EDF wegen gleicher Größe (§. 99) und gleicher gegenseitiger Neigung ihrer Ebenen (Vorauss.) sich decken, und die Kanten ad und AD, de und DE, df und DF zusammenfallen. Weil ferner jetzt die Ebenen abc und ABC gleiche Neigung gegen die Ebene ADF (adf) haben (Vorauss.), und wegen $dab = DAB$ (§. 99) $ab \parallel AB$ ist (§. 46. Zus. 2), so ist $abc \parallel ABC$ (§. 159. Zus. 2.) Fällt man von D auf die Ebene ABC die Senkrechte DG, so steht sie auch senkrecht auf abc (§. 157), und dg und DG sind sonach die Höhen der Prismen p und P. Legt man durch den Winkel ADG eine Ebene, so sind die Durchschnittslinien ag und AG parallel (§. 154. Zus. 1), und es ist daher $dg : DG = ad : AD$ (§. 95.)

Da aber die (zusammenhängenden) Grund- und Seitenflächen ähnlich sind (Vorauss. und §. 199), so ist
$ad : AD = ab : AB = bf : BF = bc : BC$ 2c. (§. 99.) Es ist daher auch $dg : DG = ab : AB$.

Bezeichnet man die Höhen dg und DG der Prismen p und P mit h und H und ihre Grundflächen mit g und G, so ist, da $g \sim G$

$$g : G = ab^2 : AB^2 \quad (§.\ 136)$$

Nun ist $h : H = ab : AB$, und mithin

$$\overline{g . h : G . H = ab^3 : AB^3}$$

Es ist ferner $p : P = g . h : G . H$ (§. 189. Zus. 2),
und folglich $p : P = ab^3 : AB^3$, und weil
$ab : AB = ad : AD = bf : BF$ 2c. und somit auch
$ab^3 : AB^3 = ad^3 : AD^3 = bf^3 : BF^3$ 2c. ist,

$$p : P = ab^3 : AB^3 = ad^3 : AD^3 = bf^3 : BF^3 \text{ 2c.}$$

Da endlich $ab : AB = dg : DG = h : H$ ist, so ist auch

$$p : P = h^3 : H^3.$$

Im zweiten Fall denke man sich ein Prisma p, welches mit dem Prisma p′ (Fig. 181) congruente Grundfläche und gleiche Höhe hat und mit dem Prisma P in der zuerst bezeichneten Art ähnlich ist, so ist $p = p'$ und $p' \backsim P \backsim p$. Es ist daher auch $af \backsim a'f'$ (§. 199), und $ab : a'b' = ad : a'd'$; nun ist aber $ab = a'b'$, und daher auch $ad = a'd'$. In gleicher Art läßt sich zeigen, daß auch $bf = b'f'$, $ce = c'e'$ ɩc. ist. Nach dem ersten Fall ist

$$p : P = ab^3 : AB^3 = ad^3 : AD^3 \text{ ɩc.}$$

folglich ist auch $p' : P = a'b'^3 : AB^3 = a'd'^3 : AD^3 = b'f'^3 : BF^3$ ɩc.

Da ferner $p : P = h^3 : H^3$, die Höhe h des Prisma p aber der Höhe h′ des Prisma p′ gleich ist, so ist auch $p' : P = h'^3 : H^3$.

Beispiel. Die bayersche Maß hält 43 bayersche Dezimalkubikzoll; wie viel Pariser Duodezimalkubikzoll hält sie, da der bayersche Fuß 129, 38, der Pariser Fuß 144 Pariserlinien hält?

Auflösung. Da Würfel ähnliche Prismen sind, so ist

$$1\,c'\text{bayr.} : 1\,c'\text{Par.} = (129,38)^3 : 144^3$$

und folglich $144^3 . c' . \text{bayr.} = (129,38)^3\, c' . \text{Par.}$;

es ergibt sich sonach die Proportion

$$144^3\, c' . \text{bayr.} : 0,043 . c'\text{bayr.} = (129,38)^3\, c' . \text{Par.} : x,$$

woraus sich $x = 0,03118762\, c' = 53,8922\, c''$ Pariser Duod. Maß findet.

Zusatz 1. Auf die nämliche Art, wie der vorige Lehrsatz, wird auch der Satz bewiesen: Aehnliche Pyramiden verhalten sich die Kubikzahlen ihrer gleichliegenden Seitenlinien oder ihrer Höhen.

Zusatz 2. Aehnliche Körper überhaupt verhalten sich wie die Kubikzahlen gleichliegender Linien an denselben oder innerhalb derselben. Der Beweis dieses Satzes setzt mehrere andere Sätze voraus, die hier keinen Raum finden konnten.

Beispiel. Das hölzerne Modell eines zu gießenden eisernen Werkstückes ist nach dem sechsten Theil des Längenmaßstabes seiner natürlichen Größe gefertigt, und wiegt $1\frac{1}{2}$ Pfd.; wie schwer wird das Werkstück selbst wiegen, da das spez. Gew. des Holzes, aus welchem das Modell verfertigt ist, 0,85, und das spez. Gew. des Gußeisens 7,20 ist?

Zusatz 3. Auf dem Zusatz 2 beruht auch die Einrichtung des sogenannten **kubischen** oder **Kreuz-Visirstabes**, welcher ge-

wöhnlich zur Bestimmung der in einem vollen Faße enthaltenen Menge von Flüssigkeit nach dem landesüblichen Maß z. B. in bayerschen Eimern gebraucht wird. Die Einrichtung desselben ist folgende: Man läßt sich ein Faß (Fig. 182) verfertigen, welches einen bayerschen Eimer (oder Vierteleimer ꝛc.) faßt. Durch das Spundloch desselben steckt man einen Stab XZ (Fig. 183), welcher bei X keilförmig zugeschnitten ist, damit er zwischen die Dauben und den Boden an der untersten Stelle p desselben hineinpasse, und bemerkt die Länge rp = X1. Nun theilt man X1 in 1000 gleiche Theile (§. 98), deren einer t sei, und verzeichnet dann auf dem Maßstab XZ von X aus folgende Linien:

$$X2 = rp \cdot \sqrt[3]{2} = rp \cdot 1{,}260 = 1000t \cdot 1{,}260 = 1260t$$

$$X3 = rp \cdot \sqrt[3]{3} = rp \cdot 1{,}442 = 1000t \cdot 1{,}442 = 1442t$$

$$X4 = rp \cdot \sqrt[3]{4} = rp \cdot 1{,}587 = 1000t \cdot 1{,}587 = 1587t$$

$$X5 = rp \cdot \sqrt[3]{5} = rp \cdot 1{,}710 = 1000t \cdot 1{,}710 = 1710t \text{ ꝛc.},$$

so ist der kubische Visirstab fertig.

Will man nun mit Hilfe desselben den Inhalt eines vollen Faßes F (Fig. 176), welches dem Faße f (Fig. 182) ähnlich ist, in bayerschen Eimern (Vierteleimern ꝛc.) angeben, so schiebe man durch das Spundloch R desselben den Visirstab mit X voran bis an den untersten Punkt P des Bodens, so daß X an P kommt, und merke auf dem Visirstab die Zahl, welche bei R steht z. B. 5, also daß RP = X5 ist, so gibt diese Zahl die Menge der im Faße F enthaltenen Eimer (Vierteleimer ꝛc.) an.

Denn es ist $F : f = RP^3 : rp^3$ (Zus. 2),

oder $F : f = (rp \cdot \sqrt[3]{5})^3 : rp^3$ (Einr. d. Visirst.)

d. h. $F : f = rp^3 \cdot 5 : rp^3$

$= 5 : 1;$

es ist daher $F = 5f = 5$ bayr. Eimern (Vierteleimern ꝛc.)

Der Gebrauch des kubischen Visirstabes gibt größtentheils ein ziemlich unrichtiges Resultat, indem dabei immer vorausgesetzt wird, daß das Faß F dem Faße f vollkommen ähnlich sei, welches gewiß selten statt findet. Dessen ungeachtet wird derselbe seiner Bequemlichkeit wegen fast allgemein gebraucht.

§. 201.

Anhang. Zusammenstellung der im dritten und vierten Abschnitt zur Berechnung der Oberfläche und des kubischen Inhaltes der vorzüglichsten geometrischen Körper entwickelten Formeln.

1) Formeln zur Berechnung der Oberflächen.

Oberfl. d. Prisma (Prllpdn.)	$= ps + 2g$	(§. 179)
Seitenfl. d. senkr. Cylinders	$= 2r\pi h$	(§. 180)
Gesammtoberfl. d. senkr. Cyl.	$= 2r\pi(h+r)$	
Seitenfl. d. senkr. Kegels	$= r\pi s$	(§. 182)
Gesammtoberfl. d. senkr. Kegels	$= r\pi(r+s)$	
Seitenfl. d. abgek. gleichs. Kegels	$= (R+r)\pi s$	(§. 183)
Gesammtoberfl. d. abg. gleichs. K.	$= (R^2+r^2+(R+r)s)\pi$	
Flächeninhalt einer Zone	$= 2r\pi h$	(§. 184)
Krumme Oberfl. eines Kugelsegm.	$= 2r\pi h$	
Oberfläche der Kugel	$= d^2\pi$	

2) Formeln zur Berechnung des kubischen Inhaltes.

Prisma (Prllpdn.)	$= G.H$	(§. 187, 188, 189.)
Cylinder	$= R^2\pi.H$	(§. 190.)
Pyramide	$= \frac{G.H}{3}$	(§. 192.)
Kegel	$= \frac{R^2\pi.H}{3}$	(§. 193.)
Abgek. Pyramide	$= \frac{1}{3}H(G+\sqrt{G.g}+g)$	(§. 194.)
Abgek. Kegel	$= \frac{1}{3}H\pi(R^2+Rr+r^2)$	(§. 195).
Kugelsector	$= \frac{2}{3}r^2\pi.h$	(§. 196.)
Kugel	$= \frac{1}{6}d^3\pi$	
Kugelsegment	$= h^2\pi(r - \frac{h}{3})$	(§. 197.)

Vermischte geometrische Aufgaben zur Selbstübung.

1) Jemand besitzt einen Garten von $1\frac{1}{2}$ Tagwerk, welcher rechtwinklig und 150 Fuß breit ist. Er verkauft davon zu einem Bauplatz ein Stück von der Breite des Gartens, welches 400 Quadratklafter hält; wie viel wird demnach von der Länge des Gartens abgeschnitten, und wie viel Länge behält der Garten noch, da das bayersche Tagwerk 40000 Quadratfuß hält?

2) Ein Gebäude soll 50′ breit werden, und ein 25′ hohes Giebeldach bekommen, wie lange müssen die Dachsparren seyn, ohne auf den Vorsprung des Daches über die Mauer Rücksicht zu nehmen?

3) Es soll eine würfelförmige Kiste verfertigt werden, welche eben so viel faßt, als drei ähnliche Kisten miteinander, von welchen die erste 2′ 6″, die zweite 2′ 3″ und die dritte 3′ 2″ Duod. Maß tief ist; wie tief muß jene werden?

4) Bei dem neuen deutschen Giebeldach hält der Winkel am Firste 90°, welches Verhältniß hat hier die Höhe des Daches zur Breite des Hauses?

5) Es soll ein Kanal ausgemauert werden, welcher gleich breit und tief ist, und eben so viel Wasser aufnimmt, als folgende drei Kanäle (von gleicher Länge mit dem vorigen), von welchen der erste 2′ breit und 2′ hoch, der zweite 3′ breit und 3′ 6″ hoch, und der dritte 2′ 6″ breit und 3′ Duod. Maß hoch ist; welche Breite oder Tiefe muß dieser neue Kanal haben?

6) Wie schwer wiegt ein 5′ langer hohler Cylinder von Gußeisen, dessen Durchmesser im Lichten 1′ 5″, und dessen Eisenstärke 1″ 6‴ Duod. Maß hält, da ein Kubikfuß Wasser 44,17 Pfd. wiegt, und das spez. Gew. des Gußeisens 7,2 ist?

7) Ein Graben ist 10′ breit, und dahinter steht eine Mauer von 24′ Höhe. Man soll eine Leiter anlegen, welche von diesseits des Grabens bis an die Oberkante der Mauer reicht; wie lange muß die Leiter wenigstens seyn?

8) Ein Floß besteht aus 12 tannenen Bäumen von ziemlich cylindrischer Form, deren jeder 18′ lang ist und 10″ Duod. Maß

im Durchmesser hat; welches Gewicht kann dieses Floß tragen, bis es der Oberfläche des Wassers gleich schwimmt, da ein Kubikfuß Wasser 44 Pfd. wiegt, und das spez. Gew. des Tannenholzes 0,55 ist?

9) Der Halbmesser eines Kreises ist r; wie groß ist der Flächeninhalt eines in denselben eingeschriebenen — und wie groß der eines um denselben beschriebenen Quadrates?

10) Ein Blechschmidt soll eine (cylindrische) Rinne verfertigen, welche 6″ Duod. Maß im Durchmesser hat. Wie groß muß er die Breite der einzelnen (blechernen) Rechtecke nehmen, aus welchen die Rinne zusammengebogen wird, wenn die Bedeckung der Ränder derselben $\frac{3}{4}$″ beträgt?

11) Die spanischen Colonien in Amerika haben seit der Entdeckung desselben bis 1803 nach A. v. Humboldt's Berechnung 503978168 preußische Mark Silber geliefert. Wenn nun ein Kubikfuß Silber 1423 preuß. Mark wiegt, wie groß würde die Höhe eines Würfels seyn, den man aus dem in dieser Zeit gewonnenen Silber verfertigen wollte? — Wie groß wäre der Durchmesser, wenn man aus dieser Masse eine Kugel gießen könnte?

12) Ein Quadrat, ein Rechteck und ein Kreis haben gleichen Flächeninhalt a^2; welche von diesen Figuren hat den kleinsten — welche den größten Inhalt? — Wie groß ist in diesem Fall der Unterschied zwischen den Umfange des Quadrates und dem des Kreises?

13) Nach A. v. Humboldt beträgt die Goldproduktion im spanischen Amerika und in Brasilien von 1492 bis 1803 9756160 preuß. Mark. Wie lange würde die cylindrische Goldstange seyn, welche man daraus verfertigen könnte, wenn man ihr einen Durchmesser von 2″ Dez. Maß gäbe, da ein Kubikfuß Gold 2542 preuß. Mark schwer ist?

14) Aus einem runden Stamm wird ein Balken von größter Tragkraft gehauen, wenn sich die Breite zur Höhe (ohngefähr) wie 5:7 verhält; wie viel Kubikinhalt hat demnach ein solcher Balken, wenn der Durchmesser des Stammes am Zopfe 1′ 6″ Duod. Maß hält, und der Stamm selbst 21′ lang ist?

15) Wie groß ist allgemein ausgedrückt der Fehler, wenn man (wie bei der Berechnung des Inhaltes von Baumstämmen 2c.) einen

abgekürzten Kegel, dessen unterer Halbmesser R und dessen oberer Halbmesser r ist 1) als einen Cylinder von gleicher Höhe und einer Grundfläche, deren Durchmesser das arithmetische Mittel zwischen dem obern und untern Durchmesser ist — und 2) als einen Cylinder von gleicher Höhe und einer Grundfläche, welche das Mittel zwischen den Grundflächen des abgekürzten Kegels ist, berechnet?

16) Ein rechtwinkliges Dreieck hat einen Flächeninhalt von 216□° und eine Kathete desselben hält 18°; wie groß ist die andere Kathete, und wie groß die Hypotenuse?

17) Die halbkugelförmige Kuppel eines Thurmes soll mit Kupfer gedeckt werden; was beträgt der Kostenüberschlag, wenn die Kuppel einen Durchmesser von 12' hat, und der Quadratfuß 1 fl. 12 kr. kostet?

18) Wie groß ist der Zwischenraum zwischen drei sich berührenden gleichgroßen Kreisen (z. B. runden Fensterscheiben) (Fig. 184), wenn der Durchmesser eines der Kreise 4'' Dez. Maß hält?

Berichtigungen.

Seite 3. Zeile 2. lies statt müßte eine, müßte in Hinsicht auf Größe eine. — S. 3. Z. 8. l. st. zwei, je zwei. — S. 11. Z. 4. l. st. Grundseite, Grundeinheit. — S. 12 und 13. l. überall st. $\frac{1}{4}$ C, $\frac{1}{4}$ P und st. $\frac{1}{4}$ c, $\frac{1}{4}$ p. — S. 24. Z. 3. l. st. §. 36., §. 37. — S. 33. Z. 19. l. st. die gleiche, gleiche. — S. 35. Z. 18. l. st. eine, die. — S. 36. Z. 22. l. st. BC, DC. — S. 39. Z. 3. l. st. DEE, DEF. — S. 40. Z. 25. l. st. 1, $\frac{1}{2}$. — S. 47. Z. 22. setze nach des, §. 84. und des. — S. 50. Z. 31. l. st. zwei, je zwei. — S. 51. Z. 19. l. st. DE, BE. S. 54. Z. 24. l. st. DF, DE. — S. 55. Z. 23. l. st. DE, BE. — S. 60. Z. 2. l. st. 115, 110, und Z. 26. st. AD, AOD. — S. 70. Z. 22. l. st. b, b. — S. 72. Z. 4, 5 und 6. l. st. 9, 19. — S. 72. Z. 8. l. st. $2' \, 6'' \, 5'''$, $2^{\circ} \, 6' \, 5''$, und Z. 15. l. st. $4'''$, $4''''$. — S. 79. Z. 3. l. st. 1097,6, 1067,6. — S. 82. Z. 28. l. st. AB, AB^2. — S. 91. Z. 13. l. st. ABC, BAC. — S. 94. Z. 5. l. st. AC, AD. — S. 101. Z. 32 und 33. l. Parallelepipedon. — S. 128. Z. 31. l. st. 3, 2.

Inhalt.

Inhalt.

Seite

II. Abtheilung.

Von geometrischen Körpern. — Stereometrie.



